



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE COAHUILA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Doblete de isoespín en la representación $(1,0) \oplus (0,1)$
del grupo de Lorentz como modelo de materia oscura

POR:

Kort Gerardo Rodríguez Beck

T E S I S

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO FÍSICO



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE COAHUILA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

**Doblete de isoespín en la representación $(1,0) \oplus (0,1)$
del grupo de Lorentz como modelo de materia oscura**

POR:

Kort Gerardo Rodríguez Beck

T E S I S

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO FÍSICO

DIRECTOR:

Dr. Simón Rodríguez Rodríguez

CODIRECTOR:

Dr. Jaime Burgos García

Agradecimientos

Agradezco a mis padres Gregorio y Evalyn así como a mi hermana Ana Laura por su apoyo incondicional y paciencia, no solo durante el periodo de elaboración de esta tesis, sino de toda la licenciatura. Gracias también a mi tía Ana Sofía por su cariño y apoyo familiar que me ha dado paz en diversos momentos de angustia. Especialmente agradezco a mi madre Evalyn, quien se ha esforzado durante toda mi vida por formarme bajo las mejores condiciones posibles, emocionales, humanas, académicas, etc. Sin ella, quizá no habría alcanzado la mayoría de metas que hasta ahora he logrado. Todos mis logros se los dedico a ella.

Gracias también al profesor Simón Rodríguez por prepararme académicamente mediante cursos optativos que fueron herramientas fundamentales para iniciar mi proceso de investigación y escritura de tesis. También agradezco su constante dedicación y orientación en el proceso de revisión y corrección de este documento, así como el tiempo que se tomó escuchando y aclarando mis dudas en cada reunión de discusión. Agradezco también su dedicación a las clases e investigación, considero que él junto con el profesor Alibeit Kakes y David Zaldivar, son quienes mejor imparten cátedra en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.

También agradezco al profesor Carlos Rodríguez quien como a muchos otros estudiantes, me ha ayudado y motivado a crecer como Físico. Carlos siempre se ha destacado por ayudar a mejorar las condiciones académicas y personales de los estudiantes. Tiene una verdadera vocación más allá de simplemente impartir cátedra en la Facultad. Además, dentro del conjunto de profesores de la Facultad, es uno de los que más realiza investigación y aún más importante, alienta a los estudiantes a involucrarse en la misma.

Finalmente, aunque no estuvo directamente relacionado con el proceso de elaboración de esta tesis, quisiera agradecer también a Alfredo Aranda (Fefo). Fefo me recibió como estudiante de verano hace un año y me dio la oportunidad de colaborar con él y otros estudiantes en un proyecto de investigación. Además, me guió en el proceso de solicitud de admisión a programas de doctorado, algo por lo que siempre le estaré muy agradecido, pues logré ser admitido en un Departamento de Física de primer nivel en Estados Unidos. El que Fefo haya creído en mí, fue algo que me inspiró a seguir trabajando para alcanzar mi meta de dedicarme a la ciencia pura.

Índice

Introducción	1
1 El grupo de Lorentz	7
1.1 Transformaciones de Lorentz	8
1.2 Álgebras de Lie	13
1.3 Los generadores del grupo de Lorentz	15
1.4 Las representaciones irreducibles del grupo de Lorentz	17
2 Teoría de Campo	22
2.1 La representación $(0,0)$	22
2.2 La representación $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$	23
2.3 La representación $(1,0)\oplus(0,1)$	28
2.4 Simetrías y ecuaciones de Euler - Lagrange	32
2.5 Simetría de Gauge	37
2.6 Electrodinámica cuántica	39
2.7 Electrodinámica cuántica escalar	44
3 El Modelo Estándar	45
3.1 Simetrías espacio-temporales	46
3.1.1 Conjugación de carga	46
3.1.2 Paridad	47
3.1.3 Simetría CP	47
3.1.4 Inversión temporal	47
3.1.5 Simetría CPT	48
3.2 Simetrías Gauge	49
3.3 Anomalías	51
3.4 Sector electrodébil y pérdida de una simetría	52
3.4.1 Sector escalar	54
3.4.2 Sector fermiónico	60
3.4.3 Sector de Yukawa	61
3.4.4 Sector bosónico	62
3.5 Cromodinámica Cuántica	63
4 Materia oscura tensorial	66
4.1 Rompimiento espontáneo de la simetría	66
4.1.1 Sector de interacciones	67
4.1.2 Sector de masas y de Yukawa	70
5 Detección directa de materia oscura	73
5.1 Interacción independiente de espín	73
5.2 El experimento XENON1T	75
5.3 Teoría nuclear - electrodébil efectiva	76
5.4 Dispersión $\Psi^0 N \rightarrow \Psi^0 N$	77
5.4.1 Canal de Higgs	79
5.4.2 Canal de Z	80
5.4.3 Término de interferencia	81
5.4.4 Sección transversal	81
5.5 Consistencia del modelo con XENON1T	82

6	Conclusiones y perspectivas	84
7	Apéndice: Convenciones	85
8	Apéndice: Reglas de Feynman para la materia oscura	87
	Referencias	89

Introducción

Desde hace ya algunas décadas sabemos de la existencia de cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza: el electromagnetismo, la interacción débil, fuerte y la gravedad. Las primeras tres de estas interacciones han sido unificadas en el llamado *Modelo Estándar* el cuál está sostenido en la teoría de campos cuánticos. Esta teoría modela a todas las partículas fundamentales como “fluctuaciones” de un campo cuántico, uno para cada tipo de partícula, que permea todo el espacio-tiempo. Es decir, todos los electrones del universo, por ejemplo, no son más que fluctuaciones de un mismo campo cuántico. El Modelo Estándar ha sido sorprendentemente exitoso, predicciones usando el Modelo Estándar encajan casi a la perfección con las mediciones más precisas jamás realizadas. Alcanzar la versión final de esta teoría tomo décadas de arduo esfuerzo, no fue hasta 2012 que la pieza final faltante predicha por el Modelo Estándar fue detectada en el Gran Colisionador de Hadrones (*Large Hadron Collider*, LHC) en CERN, el bosón de Higgs. Un poco de la historia relacionada con el desarrollo del Modelo Estándar se discute en el capítulo 3.

A pesar del tremendo éxito de la teoría, desde hace ya algunos años sabemos que el Modelo Estándar no está completo, es decir, hay fenómenos observados que no pueden ser explicados mediante el Modelo Estándar. Algunos de estos problemas son: La asimetría de materia y antimateria en el universo, problema de violación CP fuerte, descripción incompleta de agujeros negros y desconocimiento de la naturaleza del 95 % de contenido del universo. De toda la materia y energía que pensamos existe en el universo, el Modelo Estándar sólo describe el 5 %, comúnmente llamada materia ordinaria, leptones, quarks, fotones, bosones W y Z, gluones y sistemas compuestos de los mismos. ¿Qué hay del 95 % restante? no tenemos idea, al menos las ideas que hemos tenido hasta el momento no han sido exitosas. Se estima que alrededor del 69 % del universo está compuesto de energía oscura, esta sería la responsable de la expansión del universo. El 26 % restante sería la llamada materia oscura, llamada así porque, hasta ahora, no ha sido observada mediante técnicas de observación astronómica en ninguna parte del espectro electromagnético, en otras palabras, no debería interactuar con la luz. Sabemos, sin embargo, que existe por sus efectos gravitacionales, las galaxias giran más rápido de lo que se esperaría si solo se considera la masa estimada por medio de observaciones “electromagnéticas”. Adicionalmente, cada vez son más los resultados experimentales que no encajan con el Modelo Estándar. Algunos son, la medición del momento magnético anómalo del muón [1], la observación de oscilación de neutrinos [2–4], la posible no conservación del número leptónico [5], y la impactante medición de la masa del bosón W por parte de la colaboración CDF II [6]. Estas observaciones apuntan a Física más allá del Modelo Estándar (*Beyond Standard Model*, BSM). Algunas ideas proponen una explicación a estas observaciones a través de materia oscura, aunque no todos los modelos de materia oscura pretenden resolver estos problemas. En este trabajo atacamos únicamente el problema de la materia oscura extendiendo el Modelo Estándar mediante un doblete de campos tensoriales antisimétricos de segundo rango, es decir, en la representación $(1,0)\oplus(0,1)$ del grupo de Lorentz.

Quien por primera vez consideró la posibilidad de que existiera materia no “visible” y estimó cuantitativamente la densidad de esta *materia oscura* en la Vía Láctea fue Lord Kelvin [7]. El acercamiento de Kelvin fue a través de la teoría de los gases, una herramienta particular de la termodinámica. En 1906, Henri Poincaré inspirado en las ideas de Kelvin y utilizando el término “materia oscura” (“*matière obscure*” en el Francés de la época), corroboró las estimaciones de Kelvin [8–10]. Posteriormente, alrededor de 1915 - 1930, mediante técnicas más cuantitativas y rigurosas, los resultados de Kapteyn

[11], Jeans [12], Lindblad [13], Opik [14] y Oort [15], no se alejaron mucho de lo estimado por Kelvin y Poincaré. La conclusión era que, de existir la materia oscura, lo más probable era que su densidad en la Vía Láctea fuera menor o incluso alrededor de la mitad de la densidad de materia visible. Es necesario recalcar que, a lo que estos pioneros llamaban materia oscura, serían estrellas que orbitan la galaxia, pero que no emiten ni reflejan luz, o lo hacen muy débilmente tal que jamás serían observadas, y no lo que actualmente consideramos como materia oscura.

Las primeras observaciones que comenzaron a indicar la presencia de materia “no visible” (materia oscura) en el universo y que despertaron interés en la comunidad, fueron reportadas por Fritz Zwicky y Sinclair Smith. Sus análisis se centraron en estudiar cúmulos de galaxias, su cociente masa-luz¹ y la velocidad de dispersión de sus galaxias debido a la expansión del universo reportada en una primera instancia por Hubble. En 1933 [16] y 1937 [17], Zwicky reportó un análisis del cúmulo de galaxias Coma. Utilizando el teorema del virial, determinó la masa de las galaxias y analizando datos de corrimiento al rojo publicados por Hubble en 1931 [18], determinó la velocidad de dispersión de estas galaxias y con ello estimó el cociente masa-luz de las mismas. Sus resultados indicaban que un cociente masa-luz muy alto sería necesario para que la velocidad de dispersión calculada coincidiera con la reportada por Hubble de alrededor de 700 km/s. Zwicky infirió que, para calcular la masa de las galaxias utilizando su luminosidad, necesitamos saber cuánta materia oscura está incorporada en la galaxia en forma de estrellas frías, cuerpos sólidos y gases. La constante de Hubble interviene en estas estimaciones, en los primeros trabajos de Zwicky el valor reportado de la constante de Hubble era $H_0 = 558$ km/s/Mpc, actualmente existe una tensión entre dos valores diferentes medidos de H_0 , uno de $H_0 = 67.4$ km/s/Mpc [19] y otro de $H_0 = 73$ km/s/Mpc [20]. A pesar de la diferencia del valor de H_0 moderno (sea cual sea el correcto, si no es que ambos) y el de 1931, la velocidad de dispersión en las galaxias del cúmulo Coma implicaría un alto valor del cociente masa-luz. En 1936, Smith estudió de forma similar el cúmulo de Virgo, sus resultados indicaron también falta de masa en el cúmulo.

En su artículo de 1937, Zwicky también señaló que no era posible obtener las masas de las galaxias con mediciones de velocidad de rotación únicamente, hacía falta más información. El perfil de velocidad de rotación de una galaxia es una relación entre la velocidad y una distancia d desde el centro de la galaxia a la que es medida la velocidad. El estudio de las curvas de rotación de galaxias fue el parteaguas que más ha impactado a la comunidad en pro de la existencia de la materia oscura. Alrededor de 1950, la tecnología desarrollada con fines bélicos en la segunda guerra mundial dio lugar al nacimiento del campo de la radioastronomía. En 1957 van de Hulst y Jean Jacques Raimond [21], reportaron la primera radio-curva de rotación de la galaxia de Andrómeda, aunque los resultados parecían estar en desacuerdo con los modelos de rotación Kepleriana [22] (la velocidad de cuerpos orbitando un centro, es inversamente proporcional a la raíz de la distancia entre los objetos y el centro), Martin Schwarzschild argumentó que estas observaciones estarían en acuerdo con los modelos para un cociente de masa-luz constante alrededor de la galaxia [23]. Un par de décadas más tarde, en 1970 Vera Rubin, Kent Ford y Norbert Thonnard [24], publicaron mediciones ópticas de curvas de rotación de diez galaxias de alta luminosidad encontrando que las curvas toman un perfil plano a partir de cierta distancia desde el centro de la galaxia hasta el radio medido más lejano. Los modelos teóricos de perfiles de rotación de galaxias no predecían este aplanamiento a distancias cada vez más alejadas del centro de la galaxia, para obtener las altas velocidades observadas debía haber más masa de la calculada mediante la luminosidad de las galaxias, la materia oscura. Otras mediciones como las de Albert Bosma [25] indicaban también un aplanamiento para los perfiles de rotación incluso con mediciones a distancias más grandes que el radio observado ópticamente de las galaxias. Esto indicaba presencia de materia oscura más allá de los bordes de la galaxia que podemos ver utilizando telescopios. A estas regiones se les conoce como halos de materia

¹Cociente entre la masa de un objeto y la luz que emite. El Sol se toma como referencia con una cociente masa luz de 1 masa solar/1 luminosidad solar = 1. La mayoría de galaxias y cúmulos tienen un cociente masa-luz mayor que la unidad, esto indica la presencia de una gran cantidad de materia que no emite luz.

obscura. Otras observaciones astrofísicas encontraron también aplanamiento de curvas de rotación e indicios de regiones masivas más allá de los radios ópticos de las galaxias [26–29].

La historia detrás de las líneas de pensamiento y observaciones que dieron lugar a la idea de la materia oscura, puede ser estudiada en mayor detalle en la recopilación histórica hecha por Gianfranco Bertone y Dan Hooper [30]. Un ejemplo de una curva de rotación de la galaxia M33 se muestra en la figura 1. Es clara la gran diferencia entre la observación y la predicción de la contribución del disco estelar y gas visible, la diferencia entre estas dos debería de ser la contribución del halo de materia oscura.

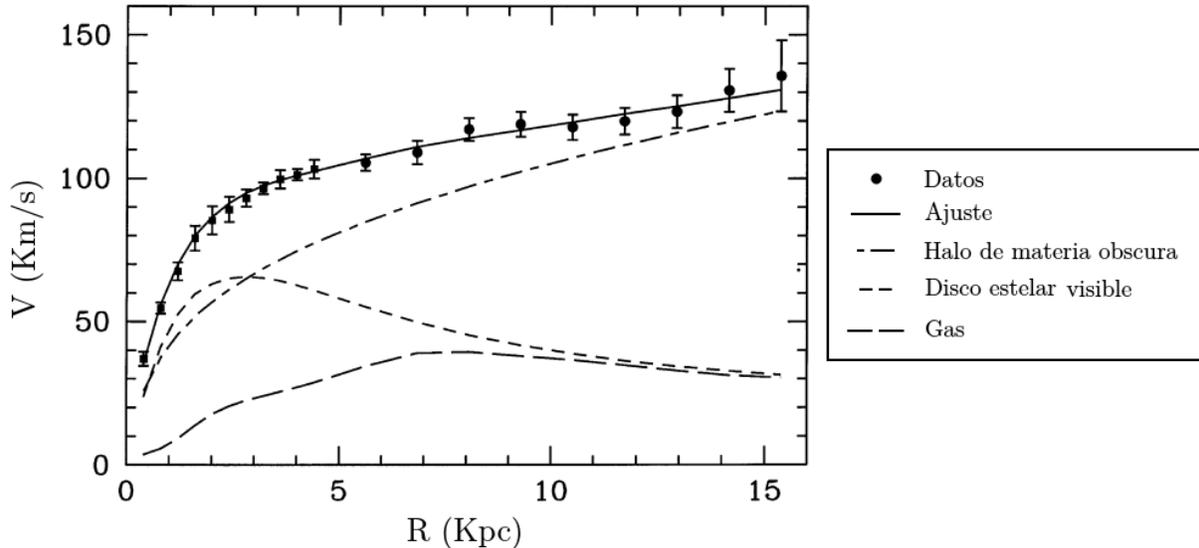


Figura 1: Curva de rotación de la galaxia M33 [31].

Con el problema de la masa faltante sobre la mesa, la comunidad comenzó a proponer ideas acerca de qué podría estar hecha la materia oscura. Eventualmente, los objetos astrofísicos fueron descartados como candidatos a materia oscura, estrellas, gas, cuerpos sólidos, etc. Otro tipo de materia oscura bariónica conocida como “MACHOs”, *Massive Astrophysical Compact Halo Objects*, compuesta de planetas, enanas cafés, rojas, blancas, estrellas de neutrones y agujeros negros, ha perdido fuerza como candidato a materia oscura con los años, una de sus últimas esperanzas fue la búsqueda de MACHOs a través de microlentes gravitacionales. Después de recolectar datos por casi siete años, la colaboración EROS detectó [32, 33] un solo evento candidato de lente gravitacional generada por MACHOs. Esto les permitió imponer un límite superior de 8% como la cantidad de masa proveniente de MACHOs en el halo de materia oscura de la Vía Láctea. Una propuesta alternativa de materia oscura bariónica son los agujeros negros primordiales. La idea es que la materia oscura podría estar formada por agujeros negros que se crearon antes de la época de la nucleosíntesis con masas lo suficientemente pequeñas para estar por debajo de las técnicas de microlentes gravitacionales. La cantidad de este tipo de objetos que se espera se hayan generado en el universo temprano, es insignificante. Por lo que no podrían aportar la masa necesaria para empatar las estimaciones de densidad de materia oscura predicha hasta ahora.

Alrededor de 1970, la comunidad de física de partículas comenzó gradualmente a abordar el problema de la materia oscura. El primer candidato estudiado fueron los neutrinos. El objetivo principal de esas primeras investigaciones era estudiar la abundancia de neutrinos en el universo y como su masa afectaría la expansión cósmica. Eventualmente, estas ideas fueron utilizadas en el problema de la materia oscura. En ese momento, los neutrinos eran el arquetipo perfecto de materia oscura, materia que no interacciona fuerte ni electromagnéticamente, interactúa muy débilmente con los demás fermiones del

Modelo Estándar y es estable. Además tienen masa muy pequeña, por lo que si son muy abundantes, podrían resolver el problema de la materia oscura, aunado a esto, viaja a una velocidad cercana a la de la luz. Se suele llamar *cold dark matter* (materia oscura fría) a partículas no relativistas y *hot dark matter* (materia oscura caliente) a partículas relativistas. Mediante simulaciones numéricas de la evolución y expansión del universo, se observó que la materia oscura caliente tiende a formar largas estructuras primero y tardíamente pequeños halos (tamaño galaxia), la materia oscura fría tiene a formar estructuras en el orden inverso. Gracias a lo anterior y observaciones 3D de galaxias [34], se concluyó que cualquier tipo de materia oscura caliente no era buen candidato a materia oscura [35]. Los neutrinos entran en la categoría de materia oscura caliente, por lo que fueron descartados como candidatos a materia oscura.

El siguiente candidato propuesto fue un nuevo tipo de partícula hasta ahora hipotética, los neutrinos estériles. En el Modelo Estándar, los neutrinos tienen quiralidad izquierda únicamente, los campos para los demás fermiones del Modelo Estándar tienen parte izquierda y derecha. Los neutrinos estériles, de existir, serían la componente derecha del campo de los neutrinos e interactuarían únicamente mediante la gravedad. Mediciones recientes de la colaboración μ BooNE [36, 37] han impuesto cotas fuertes que restringen la posibilidad de que los neutrinos estériles existan.

El siguiente candidato a materia oscura más estudiado ha sido el gravitino, el compañero súper simétrico del gravitón, la partícula hipotética que cuantizaría la gravedad. La supersimetría (conocida como SUSY) es una extensión de la simetría de Lorentz. Estas nuevas simetrías espacio-temporales relacionan fermiones y bosones, para cada bosón, debe existir un “sfermión” con los mismos números cuánticos y para cada fermión, debe existir un “bosónino” con los mismos números cuánticos. Esta teoría ha sido ampliamente estudiada en las últimas cuatro décadas por su elegancia y habilidad de resolver problemas como la unificación del acoplamiento *gauge*, el problema de jerarquía electrodébil y su éxito en la unificación de simetrías espacio-temporales con simetrías internas. Parece ser que la supersimetría es la única forma de evitar el teorema de Coleman-Mandula [38] el cual afirma que las simetrías espacio-temporales e internas no pueden combinarse de una manera trivial. Hasta la fecha no hay evidencia experimental alguna de la supersimetría ni de la cuantización de la gravedad.

Otro candidato fuerte de materia oscura son los llamados “axiones”. Existe en el contexto del Modelo Estándar un problema conocido como violación fuerte de CP^2 que implica, entre otras cosas, un momento eléctrico dipolar del neutrón de aproximadamente 10^{10} veces más grande que las cotas superiores experimentales. Para resolver este problema, Roberto Peccei y Helen Quinn [39, 40] introdujeron una nueva simetría global $U(1)$ espontáneamente rota que implica la existencia [41, 42] de un pseudo³ bosón de Nambu-Goldstone, el axión. En un rango de masas de $m_a \sim 10^{-6} - 10^{-4}$ eV, la densidad de axiones producidos posterior al rompimiento espontáneo de la simetría, es comparable con la densidad de materia oscura que se estima existe actualmente. Por esta razón, los axiones en ese rango de masas han sido ampliamente estudiados como candidatos de materia oscura. El experimento CAST ha impuesto recientemente [43] cotas sobre el acoplamiento axión - fotón, hasta ahora la evidencia experimental no parece indicar la existencia de los axiones.

Existen propuestas alternativas a la existencia de la materia oscura como lo son las teorías de gravedad modificada. La idea es que, el problema no es que haga falta materia que no hemos detectado en el universo, sino que nuestra teoría de la gravedad está incompleta y necesita de correcciones. Las propuestas más conocidas son las llamadas teorías “MOND”, *Modified Newtonian Dynamics*. El primer intento [44, 45] de teoría MOND ni siquiera era válida en regímenes relativistas, posteriormente se desarrollaron versiones relativistas de la teoría [46, 47] pero seguían teniendo problemas con observaciones de lentes

²Esta simetría se discutirá en el capítulo 3.1.3.

³Los pseudo bosones de Goldston no son estrictamente no masivos, son más bien lo necesariamente ligeros y acoplados débilmente a bajas energías.

gravitacionales, a escalas de cúmulos de galaxias las teorías fallaban. En 2004, Jacob David Bekenstein formuló [48] una versión de MOND relativista que resolvía el problema con las lentes gravitacionales llamada teoría TeVeS, *Tensor-Vector-Scalar gravity*. A pesar del éxito obtenido, la teoría TeVeS tenía el problema de no poder explicar datos recopilados del CMB, *Cosmic Microwave Background*. Recientemente, en 2021 Constantinos Skordis y Tom Złóšnik, publicaron [49] una nueva versión de MOND que explica las observaciones de CMB y lentes gravitacionales.

Para los 80 ya era claro que de existir la materia oscura en forma de partícula, debe de estar formada por materia no bariónica fría, no interaccionar con el fotón e interactuar muy débilmente mediante la interacción electrodébil, incluso mediante la gravedad únicamente. Candidatos de materia oscura con estas características son llamados “WIMPs”, *Weakly Interactive Massive Particles*. Desde entonces, además de los neutrinos estériles, gravitinos, sneutrinos, etc., se han propuesto una amplia variedad de candidatos a materia oscura con estas características. Existen varios observables que cualquier candidato a materia oscura debe explicar satisfactoriamente, abundancia de materia oscura en el universo (densidad reliquia), el flujo de fotones desde galaxias esferoidales enanas y exceso de fotones desde el centro de la Vía Láctea, cotas sobre sección transversal con nucleones y núcleo (detección directa), curvas de rotación de galaxias, restricciones de Tully-Fisher, etc. A continuación, se explican brevemente los primeros tres.

Un observable importante con el que un modelo de materia oscura debe ser consistente, es la llamada “densidad reliquia” [50]. Instantes después del Big Bang, mucho menores a un segundo, el universo temprano era una gran plasma cósmico primigenio muy denso y caliente. Las partículas fundamentales interactuaban unas con otras una y otra vez manteniendo el plasma caliente en un equilibrio térmico. Sin embargo, se cree que algunas de estas interacciones no ocurrieron lo suficientemente rápido como para mantener las condiciones de equilibrio. De hecho, se cree que este tipo de escenarios dieron lugar a la nucleosíntesis de elementos ligeros en el Big Bang, la formación de hidrógeno neutro y quizá, la producción de materia oscura en el universo primitivo. Se piensa que, la materia oscura experimentó un *freeze-out*, esto es, la aniquilación de materia oscura yendo a partículas del Modelo Estándar se detuvo debido a que la temperatura del universo cayó por debajo de la masa de la materia oscura. De este modo, la materia oscura no se aniquilaría por completo y, después de algún breve periodo de tiempo, la densidad de materia oscura en el universo se habría estabilizado. Esta densidad de materia oscura que quedó después del *freeze-out*, es la llamada densidad reliquia o abundancia reliquia. La abundancia de algún tipo de partícula, como la materia oscura, puede ser calculada mediante la llamada ecuación de Boltzman. Mediante esta ecuación se puede determinar la evolución de especies⁴ dadas la diferencia entre las tasas de producción y aniquilación de la especie en cuestión. En un modelo de materia oscura como partícula, las tasas de producción y aniquilación se calculan mediante las secciones transversales de interacciones mediadas por portales de materia oscura a Modelo Estándar. La colaboración Planck reportó [51] una medición de la densidad reliquia de materia oscura de $\Omega_{DM}h^2 = 0.120 \pm 0.001$, donde h es la constante de Hubble en unidades de 100 Km/s/Mpc. Si tomamos por ejemplo $h = 0.67$, a día de hoy la materia oscura representaría alrededor del $\Omega_{DM} \approx 26\%$ de la densidad de energía total del universo.

Otra posible señal de la existencia de la materia oscura, es un exceso sobre el flujo esperado de rayos gamma alrededor de 2 GeV del centro de la Vía Láctea. Lo anterior ha sido señalado por diversos grupos al analizar datos experimentales de colaboraciones como Fermi-LAT [52–56]. Hasta ahora, se desconoce la verdadera fuente (o fuentes) de este exceso. Diversos objetos astrofísicos podrían explicar este fenómeno como lo son los pulsares de milisegundos [57, 58]. Sin embargo, se piensa que este exceso proviene de aniquilación de materia oscura a partículas que irradian fotones gamma como el muón, tau,

⁴Tipos de partículas, materia oscura, neutrinos, etc.

o mediante hadronización⁵ de quarks. También el flujo de fotones desde galaxias esferoidales enanas⁶ impone límites sobre la aniquilación de materia oscura a dos fotones, $\mu^+\mu^-$, $\tau^+\tau^-$ y $b\bar{b}$ [59, 60].

En la detección directa se busca determinar la sección transversal de dispersión entre materia oscura y núcleo o determinar cotas superiores sobre este observable. Los principales experimentos de detección directa de materia oscura (mediante dispersión con núcleo atómico) en la actualidad son: DAMA/LIBRA [61, 62], LUX [63, 64], PandaX [65] y XENON1T [66]. En la mayoría de los modelos que buscan explicar estos datos, la interacción entre núcleo atómico y materia oscura es mediada por Higgs y bosón Z. Mediante estas interacciones la materia oscura puede ir a partículas del Modelo Estándar, por esta razón se les conoce como portales. En este trabajo se calcula el observable de sección transversal independiente de espín (también conocido como *coherent scattering*) de dispersión de materia oscura con núcleos atómicos de xenón y es comparado con la cota experimental impuesta por XENON1T.

Este documento se distribuye de la manera siguiente: (1) para comenzar, se estudia brevemente el grupo de Lorentz, sus representaciones irreducibles y su relación con el grupo $SU(2)$. (2) En el segundo capítulo se discuten las simetrías y ecuaciones de evolución de una teoría de campo escrita en un formalismo lagrangiano. Obtenemos también las ecuaciones de evolución para campos que se transforman bajo la representación de Klein Gordon, Dirac y Weinberg (como ya se mencionó, en este trabajo se propone que en esta última representación podría encontrarse la materia oscura), primero como proyecciones sobre espacios de paridad bien definida y después mediante un formalismo lagrangiano. (3) En el tercer capítulo se discuten las simetrías del Modelo Estándar así como el rompimiento espontáneo de la simetría en el mínimo Modelo Estándar. También se explora una de las teorías de campo cuántico más sencillas, la electrodinámica cuántica espinorial, en la que introducimos las llamadas reglas de Feynman. (4) En el cuarto capítulo se muestra el rompimiento espontáneo de la simetría para el Lagrangiano propuesto en este trabajo. Los términos de masa y reglas de Feynman para interacción entre materia oscura y Higgs, Z, son calculadas explícitamente, pues son las necesarias para calcular la sección transversal reportada por la colaboración experimental XENON1T. (5) Posteriormente se discute brevemente la forma de operación del experimento XENON1T y se muestra el cálculo del observable σ_p reportado por XENON1T en el modelo propuesto. Se muestra también el análisis utilizado para obtener los resultados y se discuten los mismos. (6) Finalmente, se resume el trabajo presentado en este documento y se discuten algunas implicaciones de los resultados obtenidos.

⁵Los quarks no existen como partículas aisladas, siempre están enlazados a otros quarks mediante la interacción fuerte. Al generarse un quark se genera otro par quark-antiquark del vacío generando hadrones emitiendo en el proceso *jets* de partículas como rayos gamma.

⁶Estas galaxias esferoidales enanas son llamadas también galaxias satélite de la Vía Láctea. Son más pequeñas y viajan en orbitas influenciadas por la Vía Láctea “acompañando” a la misma.

1. El grupo de Lorentz

Hasta ahora, uno de los pilares fundamentales de la física moderna es la simetría de Lorentz, esta nos dice que las leyes de la física deben mantener la misma forma en todos los marcos de referencia inerciales⁷. Esta idea de invariancia de un sistema físico bajo un cierto tipo de transformaciones espaciales fue estudiada en una primera instancia por Galileo alrededor del año 1600. A la teoría de Galileo se le conoce actualmente como relatividad Galileana, esta es consistente con las leyes de movimiento de Newton. Esta descripción se consideró correcta durante mucho tiempo y aún es de utilidad, sin embargo, el 30 de junio de 1905 Einstein presentó su teoría de la relatividad especial y cambió por completo nuestra forma de percibir el tiempo y el espacio. Previo al trabajo de Einstein, James Clerk Maxwell había ya desarrollado la teoría clásica del electromagnetismo unificando el trabajo de Faraday, Ampere y Gauss. Una de las predicciones de la teoría era la velocidad constante de una onda electromagnética que se propaga en el vacío, este fue uno de los resultados que pusieron a Einstein en el camino correcto. De hecho, la teoría clásica del electromagnetismo es consistente con la relatividad especial, estaba ya codificada en su interior lo que después sería conocido como invariancia de Lorentz. En la relatividad especial, hay cantidades que pueden depender o no del sistema de referencia, aquellas que son invariantes ante cambios entre marcos de referencia son llamadas escalares de Lorentz. No todas las cantidades físicas son escalares de Lorentz, la energía por ejemplo siempre depende del marco de referencia desde el que es medida. A pesar de que la invariancia de Lorentz es un pilar fundamental de la física moderna, se ha considerado que quizá no es un aspecto tan fundamental de la naturaleza como se piensa hasta ahora. Recientemente se reportó [67, 68] por primera vez la supuesta observación de “birrefringencia cósmica”. Este efecto rota la polarización lineal del fondo cósmico de microondas y puede ser modelado en teorías de tipo Chern Simons que no preservan la simetría de Lorentz [69]. Aunque los autores afirman una medición con un 99.2% [67] y 68% [68] de nivel de confianza, hace falta que otras colaboraciones reproduzcan estas mediciones. De confirmarse lo anterior, la relatividad especial sufriría modificaciones.

En este capítulo se discuten el grupo de Lorentz y sus representaciones irreducibles. Una partícula es representada por un campo con la mayor cantidad de números cuánticos bien definidos, masa, carga, espín, etc. En la teoría cuántica estas propiedades están dadas como los valores propios de operadores hermíticos que representan a variables dinámicas, por lo que para describir a las partículas es necesario diagonalizar la mayor cantidad posible de estos operadores. Una propiedad fundamental en este sentido es el espín de las partículas (momento angular intrínseco) que surge de la caracterización de las rotaciones en el espacio. Para describir esta propiedad en un régimen relativista se debe hacer un estudio del grupo de Lorentz y sus representaciones irreducibles.

⁷Un marco de referencia inercial es aquel que se mueve a velocidad constante respecto de un observador.

1.1. Transformaciones de Lorentz

En la teoría de la relatividad especial, Einstein propone los siguientes postulados:

- I. La velocidad de la luz es la misma en cualquier marco de referencia inercial.
- II. Las leyes de la física deben ser las mismas, es decir invariantes, en cualquier marco de referencia inercial.

Consideremos dos marcos de referencia inerciales S y S' alineados a lo largo del eje x . El marco S' se mueve a velocidad v en dirección de x^1 . El origen de ambos marcos de referencia coincide en un tiempo $t = t' = 0$.

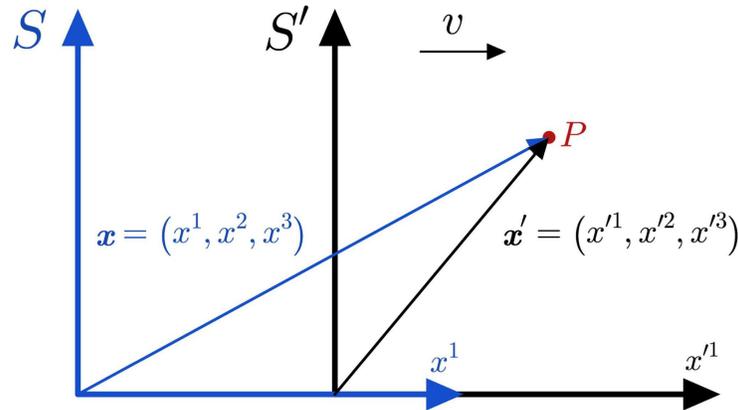


Figura 2: Movimiento relativo entre S y S' .

La relación entre las coordenadas de los sistemas S y S' está dada por las transformaciones de Lorentz

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \quad , \quad x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \quad , \quad x'^2 = x^2 \quad , \quad x'^3 = x^3 \quad (1.1)$$

donde $x^0 = ct$, $\beta = v/c$ y $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Estas relaciones nos permiten encontrar las coordenadas en S' dadas las coordenadas en S . Las transformaciones inversas están dadas por

$$x^0 = \gamma(x'^0 + \beta x'^1) \quad , \quad x^1 = \gamma(x'^1 + \beta x'^0) \quad . \quad (1.2)$$

La única diferencia es el signo que acompaña a $\beta = v/c$. Es decir, la transformación inversa la podemos obtener cambiando $\beta \rightarrow -\beta$ (y las correspondientes cantidades primadas) lo cual tiene sentido, pues desde la perspectiva del marco S' es el marco S el que se mueve a la izquierda.

Es sencillo observar que

$$(x^0)^2 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = (x'^0)^2 - \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' \quad , \quad (1.3)$$

es invariante, es decir, no depende del marco de referencia. Es conveniente definir entonces los siguientes arreglos de coordenadas

$$x^\mu = (x^0, \mathbf{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad , \quad x_\mu = (x_0, -\mathbf{x}) = (x_0, x_1, x_2, x_3) \quad , \quad (1.4)$$

donde $x^0 = x_0$ y $x_j = -x^j$ para $j = 1, 2, 3$. El arreglo de coordenadas x^μ representa un evento en el espacio tiempo. De este modo podemos reescribir la expresión en (1.3) como

$$x^\mu x_\mu = x'^\nu x'_\nu \quad , \quad (1.5)$$

se entenderá la suma sobre pares de índices repetidos uno como superíndice y otro como subíndice en “productos” (esto se conoce como contracción de índices), esta es la convención de sumación de Einstein. Esta expresión es un producto escalar en un espacio-tiempo plano⁸, también llamado espacio de Minkowski. Las cantidades de la forma

$$x^\mu x_\mu \quad , \quad (1.6)$$

son llamados escalares de Lorentz. Del estudio de las propiedades geométricas del espacio tiempo, el objeto que codifica la estructura geométrica del mismo se conoce como “métrica”, su forma es inducida por el producto escalar. En un espacio-tiempo de Minkowski la métrica está dada por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad (1.7)$$

siendo simétrica en sus índices. Esta dicta la forma del producto escalar en el espacio-tiempo en cuestión. En términos de la métrica, podemos escribir

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad . \quad (1.8)$$

En general, se define una transformación de Lorentz como

$$x'^\nu = \Lambda^\nu_\mu x^\mu \quad , \quad (1.9)$$

de manera que deje el producto escalar invariante, ver ecuación (1.5). Para los objetos de la forma x_μ la transformación es

$$x'_\nu = g_{\nu\alpha} x'^\alpha = g_{\nu\alpha} \Lambda^\alpha_\mu x^\mu = \Lambda_\nu^\mu x_\mu \quad . \quad (1.10)$$

⁸A este espacio-tiempo se le llama “plano” porque no hay una deformación espacio-temporal, sin embargo, la geometría del espacio-tiempo es hiperbólica.

Los objetos que se transforman como lo hace x^μ se conocen como *cadrivectores contravariantes* y los que se transforman como lo hace x_μ como *cadrivectores covariantes*. Para la transformación en (1.1), el operador $\Lambda^\mu{}_\nu$ toma la forma

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad (1.11)$$

con el índice μ denotando filas y ν columnas.

El conjunto de las transformaciones de Lorentz forman un grupo. Un grupo G , definido bajo una cierta operación binaria, es con conjunto de elementos que cumple lo siguiente: (1) existe la identidad. (2) Para cada elemento del grupo, existe el inverso. (3) Es asociativo bajo la operación binaria. (4) Es cerrado bajo la operación binaria. Sustituyendo (1.9) en (1.5), podemos comenzar a caracterizar el grupo de Lorentz

$$g_{\mu\rho}\Lambda^\mu{}_\nu\Lambda^\rho{}_\sigma x^\nu x^\sigma = g_{\nu\sigma}x^\nu x^\sigma , \quad (1.12)$$

renombrando los índices, la regla que **toda** transformación de Lorentz debe cumplir es entonces

$$g_{\nu\mu}\Lambda^\mu{}_\beta\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\beta\sigma} . \quad (1.13)$$

Consideremos el elemento 00 de la métrica en el lado derecho

$$g_{\nu\mu}\Lambda^\mu{}_0\Lambda^\nu{}_0 = g_{00} = 1 , \quad (1.14)$$

efectuando la suma sobre μ y ν se obtiene

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \Lambda^j{}_0\Lambda^j{}_0 , \quad (1.15)$$

aquí se entiende la suma sobre los índices latinos repetidos de 1 a 3, lo cual es un abuso de notación ampliamente usado. Es claro que

$$(\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1 . \quad (1.16)$$

Las dos posibles soluciones son

$$\Lambda^0{}_0 \geq +1 , \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1 , \quad (1.17)$$

por lo tanto, dentro del conjunto de transformaciones de Lorentz, una transformación Λ^μ_ν cumple con $\Lambda^0_0 \leq -1$ ó $\Lambda^0_0 \geq 1$. Con estas restricciones, podemos clasificar elementos del grupo respecto a su componente Λ^0_0 .

La ecuación (1.13) también se puede escribir como

$$\Lambda^\mu_\nu \Lambda_\mu^\alpha = \delta_\nu^\alpha \quad . \quad (1.18)$$

Calculemos el determinante en la ecuación (1.18), debemos reescribir esto como un producto matricial de la siguiente manera

$$(\Lambda_{\nu\alpha})^T g^{\alpha\mu} \Lambda_{\mu\beta} = g_{\nu\beta} \quad . \quad (1.19)$$

Tomando el determinante

$$\det(\Lambda^T g \Lambda) = \det(g) = -1 \quad , \quad (1.20)$$

se obtiene que

$$[\det(\Lambda)]^2 = 1 \quad , \quad \det(\Lambda) = \pm 1 \quad . \quad (1.21)$$

Por lo tanto, dentro del conjunto de transformaciones de Lorentz, una transformación Λ^μ_ν , puede tener determinante 1 ó -1, esto crea un nuevo par de clasificaciones dentro del grupo,

$$\det(\Lambda) = \begin{cases} 1 & , \Lambda \text{ es una transformación continua} \\ -1 & , \Lambda \text{ es una transformación discreta} \end{cases} \quad . \quad (1.22)$$

Las transformaciones tales que $\det(\Lambda) = 1$ también son llamadas propias y las que cumplen con $\det(\Lambda) = -1$ son llamadas impropias. Podemos imponer el siguiente par de restricciones sobre el grupo de Lorentz

$$\det(\Lambda) = 1 \quad , \quad \Lambda^0_0 \geq 1 \quad . \quad (1.23)$$

En este nuevo conjunto solo hay transformaciones continuas, es decir propias, y con componente 00 mayor o igual que la unidad, es decir “ortocronas”, de *tiempo correcto*. Este nuevo grupo es llamado *grupo propio ortocrono de Lorentz* o en ocasiones *grupo de Lorentz restringido* y es el más simple de todos, pues es el que tiene menos elementos y más restricciones. Suele denotarse por $SO^\dagger(1, 3)$ haciendo referencia a una dimensión temporal y tres espaciales. S hace referencia a *special* (operadores con determinante igual a la unidad) y O hace referencia a *orthogonal* (operadores con su transpuesta igual a su inverso). Algunos

autores suelen denotarlo como \mathcal{L}_+^\uparrow . Se puede demostrar que $SO^\uparrow(1,3)$ es un subgrupo del grupo de Lorentz. Ya que no es posible que una transformación de parámetros continua salte de $\det(\Lambda) = 1$ a $\det(\Lambda) = -1$, o de $\Lambda^0_0 \geq 1$ a $\Lambda^0_0 \leq 1$, cualquier transformación de Lorentz que pueda ser obtenida de la identidad a través de una transformación continua de parámetros debe tener $\det(\Lambda)$ y Λ^0_0 del mismo signo que la identidad, y, por lo tanto, debe pertenecer al grupo propio ortocrono de Lorentz.

Dentro de las posibles transformaciones espacio-temporales que podemos realizar en y entre marcos de referencia se encuentran los *boosts*, rotaciones, traslaciones espacio-temporales e inversiones temporales y espaciales (transformación de paridad).

- *Boost* : Un *boost* conecta un sistema de coordenadas x^μ con otro de coordenadas x'^μ que se mueven a una velocidad constante relativa \mathbf{v} uno del otro.
- Rotaciones : Las rotaciones de un sistema coordinado dentro de un mismo marco de referencia son descritas por matrices especiales y ortogonales. Cambian la orientación de los ejes coordinados, manteniendo la perpendicularidad entre ellos.
- Traslaciones : Una traslación de coordenadas dentro de un mismo marco de referencia es representada por $x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu$, donde a^μ es un cuadrivector de componentes de reales. Es un cambio en el origen de coordenadas, que puede ser, tanto espacial como temporal.
- Inversiones espaciales : Esto se logra mediante el operador $P^\mu_\nu = \text{diag}(1,-1,-1,-1)$, solo afecta las componentes espaciales, también es llamada transformación de paridad. Es una inversión de las direcciones de los ejes coordinados, $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$.
- Inversiones temporales : Esto se logra mediante el operador de paridad $T^\mu_\nu = \text{diag}(-1,1,1,1)$, solo afecta las componentes temporales. Es la inversión del sentido de flujo del tiempo $t \rightarrow -t$.

El único tipo de transformación que no se realiza mediante operadores de la forma Λ^μ_ν , son las traslaciones espaciales, por lo que en general una transformación de Lorentz está dada por

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad . \quad (1.24)$$

Este conjunto de transformaciones forman el llamado grupo de Poincaré (grupo inhomogéneo de Lorentz). Es el grupo de transformaciones más general posible. Las transformaciones con $a^\mu = 0$, forman el grupo *grupo homogéneo de Lorentz*. El estudio del grupo de Poincaré se reduce al estudio del subgrupo propio ortocrono más transformaciones de inversión temporal y espacial [70]. Es importante recalcar que, para que las transformaciones de Lorentz formen un grupo, además de *boosts* necesitamos rotaciones. El conjunto de rotaciones $SO(3)$, forma por si mismo un grupo. Por otro lado, el conjunto de *boosts* no forma un grupo. En general, si efectuamos una serie de *boosts* en diferentes direcciones respecto de un marco de referencia S , la transformación total puede no ser representada por un *boost*. Es decir, el conjunto de *boost* no es cerrado. Para cerrar el conjunto necesitamos de las rotaciones.

1.2. Álgebras de Lie

El grupo propio ortocrono de Lorentz depende de parámetros continuos, tales grupos son conocidos como grupos de Lie. Uno de los conceptos fundamentales para el estudio de estos grupos son los llamados generadores de las transformaciones del grupo. Además, podemos representar los elementos del grupo mediante diferentes objetos matemáticos preservando las propiedades fundamentales del grupo. Esto se conoce como representaciones del grupo, el tipo de representación más común es la matricial. Dentro de las representaciones matriciales hay diversos tipos de representación, como lo son: La representación estándar, adjunta y las llamadas representaciones irreducibles, este último tipo de representación será discutido más adelante.

Comencemos definiendo los generadores para tener una descripción completa del grupo. Se dice que, un grupo de Lie contiene elementos cercanos a la identidad, una transformación continua cercana a la identidad se puede escribir como

$$f(\varepsilon) = \mathbb{1} + X\varepsilon \quad , \quad (1.25)$$

donde ε es un número real mayor que cero pero mucho menor que la unidad y X un operador lineal. Este tipo de transformaciones donde las cosas apenas cambian son llamadas infinitesimales, si aplicamos una transformación infinitesimal repetidas veces el resultado debe ser una transformación finita, aplicamos la transformación anterior k veces

$$h(\varepsilon) = (\mathbb{1} + X\varepsilon)(\mathbb{1} + X\varepsilon)\dots(\mathbb{1} + X\varepsilon) = (\mathbb{1} + X\varepsilon)^k \quad . \quad (1.26)$$

Supongamos ahora que aplicamos la transformación N veces, donde N es un número muy grande tal que ε puede ser escrito como ϕ/N , donde ϕ es un parámetro real y continuo

$$g(\phi) = \left(\mathbb{1} + \frac{\phi}{N}X \right)^N \quad , \quad (1.27)$$

tomando el límite donde N tiene a infinito obtenemos que

$$g(\phi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbb{1} + \frac{\phi}{N}X \right)^N = e^{\phi X} \quad , \quad (1.28)$$

en algún sentido, el objeto X genera la transformación finita g , por esta razón X es llamado un “generador” de la transformación. Supongamos que los elementos del grupo son matrices cuadradas (como lo son las transformaciones de Lorentz) tal que podemos expandir las transformaciones en series de Taylor para un elemento particular del grupo alrededor de la identidad. Esto significa que el parámetro ϕ es pequeño, de otro modo la serie de Taylor podría no converger al elemento del grupo. Haciendo esto obtenemos que

$$\left. \frac{dg}{d\phi} \right|_0 = X \quad , \quad (1.29)$$

la idea detrás de todo esto es que, podemos aprender mucho acerca del grupo estudiando los generadores, lo cual es más sencillo. Como hemos mencionado, los grupos continuos pueden ser estudiados vía grupos de Lie y sus álgebras. Para un grupo de Lie cuyos elementos son matrices cuadradas, su álgebra de Lie se define como:

Sea G un grupo matricial de Lie, el álgebra de Lie de G denotada por \mathfrak{g} , es el conjunto de todas las matrices X tales que

$$e^{tX} \in G, \forall t \in \mathbb{R} \quad . \quad (1.30)$$

En general, un álgebra sobre un campo K , es un espacio vectorial V equipado con un producto bilinear entre los elementos de V . En un grupo matricial de Lie, la operación binaria entre elementos del grupo es simplemente el producto ordinario entre matrices que, en general, no es conmutativo. Para los elementos del álgebra de Lie, la operación bilinear que “transforma” el espacio vectorial en un álgebra, es el *bracket* de Lie (también llamado conmutador), cada par de elementos en el álgebra deben obedecer esta regla. De hecho, el álgebra es cerrada bajo el *bracket* de Lie que se define⁹ como

$$X, Y \in \mathfrak{g} \quad , \quad [X, Y] = -[Y, X] \equiv XY - YX = W \in \mathfrak{g} \quad , \quad (1.31)$$

el cual es antisimétrico y bilineal. Los elementos del álgebra satisfacen también la identidad de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad . \quad (1.32)$$

En física, la convención utilizada para grupos matriciales de Lie es e^{-iX} y el álgebra es frecuentemente definida como *el espacio de todos los elementos de grupo infinitesimales*. La literatura en física no siempre hace una distinción clara entre el grupo matricial de Lie G , su álgebra \mathfrak{g} y el *bracket* de Lie. En física, es casi una convención llamar al *bracket* de Lie “el álgebra del grupo”.

Otras características importantes de un álgebra de Lie son las siguientes

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie real o compleja y X_i una base para \mathfrak{g} , entonces se satisface que

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n c_{ijk} X_k \quad , \quad (1.33)$$

las constantes c_{ijk} son llamadas constantes de estructura de \mathfrak{g} , estas determinan el *bracket* de Lie y satisfacen las siguientes propiedades

$$c_{ijk} + c_{jik} = 0 \quad , \quad (1.34)$$

$$\sum_m \left(c_{ijm} c_{mkl} + c_{jkm} c_{mil} + c_{kim} c_{mjl} \right) = 0 \quad , \quad (1.35)$$

estas identidades se derivan de la definición del *bracket* de Lie y la identidad de Jacobi.

⁹En realidad, esta expresión tiene una razón de ser fundamental. Puede ser derivada usando el hecho de que los elementos del grupo de Lie varían de forma suave respecto los parámetros del grupo. Para más en esto ver [71].

Es más sencillo estudiar las álgebras de Lie que sus grupos asociados, por lo general es posible encontrar una base de matrices diagonales por bloques para los generadores. La mayoría de las preguntas acerca de grupos de Lie puede ser respondida considerando un problema similar en el espacio del álgebra de Lie. Es importante recalcar que no todas las álgebras de Lie están formadas por matrices, pero afortunadamente, es suficiente estudiar grupos matriciales de Lie y sus álgebras, pues el teorema de Ado asegura que toda álgebra de Lie es isomorfa a algún álgebra matricial de Lie [72].

1.3. Los generadores del grupo de Lorentz

Ahora que sabemos qué son los generadores de un grupo, se discuten los generadores del grupo de Lorentz y sus *brackets* de Lie. Como se mencionó al principio del capítulo, las transformaciones que podemos hacer sobre marcos de referencia son *boosts* y rotaciones. Por ejemplo, un *boost* con velocidad u en la dirección del eje x^1 (también llamada transformación pura de Lorentz) está dada por el operador

$$L^1(\phi) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\varphi) & -\sinh(\varphi) & 0 & 0 \\ -\sinh(\varphi) & \cosh(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \cosh(\varphi) \quad , \quad (1.36)$$

con φ un parámetro real conocido como “*rapidity*”. De forma similar, podemos encontrar los operadores $L^2(\varphi)$ y $L^3(\varphi)$ que representan *boosts* a lo largo de los ejes x^2 y x^3 respectivamente. Siguiendo (1.29), y la convención en física, los generadores de los *boosts* están dados por

$$K^j = i \left. \frac{\partial L^j}{\partial \varphi} \right|_0, \quad (1.37)$$

sus formas explícitas son

$$K^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

De manera similar para las rotaciones, una rotación por un ángulo ϕ alrededor del eje x^1 es representada por el operador

$$R^1(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

Podemos encontrar los operadores $R^2(\phi)$ y $R^3(\phi)$ que representan rotaciones alrededor de los ejes x^2 y x^3 respectivamente. Los generadores de las rotaciones están dados por

$$J^j = i \left. \frac{\partial R^j}{\partial \phi} \right|_0, \quad (1.40)$$

$$J^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

En general, una transformación de *boost* y rotación del grupo propio ortocrono de Lorentz se puede escribir como

$$\Lambda(\phi, \varphi) = e^{-i(\mathbf{J} \cdot \phi + \mathbf{K} \cdot \varphi)}, \quad (1.42)$$

los *brackets* de Lie de los generadores son

$$[J^i, J^j] = i\varepsilon_{ijk} J^k, \quad (1.43)$$

$$[K^i, K^j] = -i\varepsilon_{ijk} J^k, \quad (1.44)$$

$$[J^i, K^j] = i\varepsilon_{ijk} K^k. \quad (1.45)$$

El conmutador en (1.43) es el álgebra de Lie del grupo de rotaciones $SO(3)$. Los generadores J^j del grupo de rotaciones son los operadores de momento angular en unidades de \hbar y son hermíticos. Por otro lado, los generadores K^j son antihermíticos. Obsérvese que los generadores de los *boosts* no cierran su álgebra, indicando que por si solos los *boosts* no forman un grupo como ya se había mencionado. Se suele definir un tensor antisimétrico $M^{\mu\nu}$ de 6 elementos independientes, los 6 generadores J^j y K^j

$$\mathbf{J} = (M^{23}, M^{31}, M^{12}), \quad (1.46)$$

$$\mathbf{K} = (M^{01}, M^{02}, M^{03}). \quad (1.47)$$

Los conmutadores en (1.43 - 1.45) pueden reescribirse en un solo conmutador

$$[M^{\mu\nu}, M^{\alpha\beta}] = -i(g^{\mu\alpha} M^{\nu\beta} + g^{\nu\beta} M^{\mu\alpha} - g^{\mu\beta} M^{\nu\alpha} - g^{\nu\alpha} M^{\mu\beta}), \quad (1.48)$$

Utilizando lo anterior, la transformación de Lorentz en (1.42) se puede escribir como

$$\Lambda(\phi, \varphi) = e^{-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}}, \quad (1.49)$$

con $\omega_{\mu\nu}$ una matriz real antisimétrica que contiene a los parámetros de *rapidity* y ángulos de rotación. De este modo completamos la caracterización del grupo propio ortocrono de Lorentz. En la siguiente sección, discutiremos las llamadas representaciones irreducibles del grupo de Lorentz.

1.4. Las representaciones irreducibles del grupo de Lorentz

A continuación se introducen los importantes conceptos de representación y representación irreducible. Una representación de un grupo G , es otro grupo \hat{G} tal que a cada $g \in G$, le corresponde uno y solo uno de $\hat{g} \in \hat{G}$. En general, lo opuesto no es verdad. Debe ser que \hat{G} tenga la misma regla de multiplicación que G . Si mediante un cambio de base todos los elementos de G se reducen a una forma diagonal por bloques, la representación es llamada reducible. Si ningún otro cambio de base produce que todos los elementos de la representación sean diagonales por bloques, entonces la representación es llamada “representación irreducible” (*irrep*¹⁰). De la misma manera se pueden definir las representaciones irreducibles de los generadores del grupo.

Para estudiar las representaciones irreducibles del grupo de Lorentz es conveniente discutir primero las representaciones del grupo de rotaciones en tres dimensiones ya que estos grupos están íntimamente relacionados. Lo anterior, refleja una íntima relación entre el espín y las propiedades geométricas de rotación del espacio-tiempo. Del estudio de las transformaciones de rotación continuas, sabemos que para un sistema cuántico con un Hamiltoniano \hat{H} , cuando se hace una rotación del sistema coordinado, los estados cuánticos también se transforman, esta transformación es representada por

$$D(\mathbf{n}, \theta) = e^{-i\theta \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \quad , \quad (1.50)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario y

$$\mathbf{J} = (J^1, J^2, J^3) \quad , \quad (1.51)$$

son elementos del álgebra Lie de la representación del grupo de rotaciones $SO(3)$. El *bracket* de Lie de los generadores es

$$[J^i, J^j] = i\varepsilon_{ijk} J^k \quad . \quad (1.52)$$

Para construir una completa y apropiada descripción de las rotaciones sobre estados cuánticos, definimos el operador

$$\mathbf{J}^2 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = (J^1)^2 + (J^2)^2 + (J^3)^2 \quad . \quad (1.53)$$

Si $D(\mathbf{n}, \theta)$ puede ser escrito en forma diagonal por bloques cuadrados mediante un cambio de base, sin que se pueda reducir más, la forma explícita de los operadores es una representación irreducible. Para encontrar las *irreps* de $D(\mathbf{n}, \theta)$, se debe encontrar una base donde la mayor cantidad de operadores sean diagonales simultáneamente. Dado el *bracket* de Lie, solo se puede diagonalizar uno de los operadores J^j , es una convención diagonalizar J^3 ya que sus valores propios están relacionados con la proyección de espín a lo largo del eje z . También es sencillo verificar que¹¹

¹⁰Irreducible representation.

¹¹Los conmutadores con el Hamiltoniano se cumplen siempre y cuando las rotaciones sean una buena simetría.

$$[\mathbf{J}^2, J^i] = 0 \quad , \quad [\mathbf{J}^2, \hat{H}] = 0 \quad , \quad [J^i, \hat{H}] = 0 \quad . \quad (1.54)$$

por lo tanto, podemos diagonalizar \hat{H} , \mathbf{J}^2 y J^3 simultáneamente. De este modo, el conjunto completo de observables que conmutan (CSCO) es $\{\hat{H}, \mathbf{J}^2, J^3\}$ y los estados cuánticos son completamente descritos por tres valores propios. Debido a que solo los operadores \mathbf{J}^2 y J^3 son necesarios para construir las representaciones irreducibles del grupo, omitiremos los valores propios de \hat{H} . Las ecuaciones de valor propio para los operadores son [73, 74]

$$\mathbf{J}^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle \quad , \quad (1.55)$$

$$J^3 |j, m\rangle = m |j, m\rangle \quad , \quad (1.56)$$

donde los valores propios son

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots \quad , \quad (1.57)$$

$$m = -j, -j+1, -j+2, \dots, j-2, j-1, j \quad . \quad (1.58)$$

Los subespacios generados para un j dado, son las representaciones irreducibles del grupo de rotaciones, una representación irreducible describe un espín j . El caso $j = 1/2$ es de particular importancia, el grupo generado por estos J^j , es $SU(2)$. Ocurre que a nivel cuántico es más fundamental $SU(2)$ que $SO(3)$, por lo que de ahora en adelante nos referiremos al grupo de rotaciones como el $SU(2)$. Para sistemas de una partícula, la dimensión del espacio de Hilbert¹² está dada por $\dim(\mathcal{H}) = 2j + 1$. Para sistemas de dos partículas por ejemplo, la base del espacio estará dada por todas las posibles combinaciones entre los estados del espacio de cada partícula, para “combinar” los espacios se toma el producto tensorial entre estados.

Regresemos a los generadores del grupo de Lorentz y definamos dos nuevos operadores

$$A^j = \frac{1}{2} (J^j - iK^j) \quad , \quad B^j = \frac{1}{2} (J^j + iK^j) \quad . \quad (1.59)$$

Recordemos que J^j es hermítico y K^j antihermítico, por lo tanto, los operadores A^j y B^j son hermíticos. Bajo una transformación de paridad, los generadores se transforman como

$$J^j \longrightarrow J^j \quad , \quad K^j \longrightarrow -K^j \quad , \quad (1.60)$$

$$A^j \longrightarrow B^j \quad , \quad B^j \longrightarrow A^j \quad , \quad (1.61)$$

paridad intercambia izquierdo por derecho, en este contexto, se suele llamar a los operadores como

¹²Espacio vectorial complejo en el que se representan estados cuánticos.

$$A^j \longrightarrow J_R^j \quad : \quad \text{Derecho (Right)} \quad , \quad (1.62)$$

$$B^j \longrightarrow J_L^j \quad : \quad \text{Izquierdo (Left)} \quad . \quad (1.63)$$

Es sencillo calcular las reglas de conmutación

$$[J_R^i, J_L^j] = 0 \quad , \quad (1.64)$$

$$[J_R^i, J_R^j] = i\varepsilon_{ijk} J_R^k \quad , \quad (1.65)$$

$$[J_L^i, J_L^j] = i\varepsilon_{ijk} J_L^k \quad . \quad (1.66)$$

Ahora, una transformación de Lorentz está dada por

$$\Lambda(\phi, \varphi) = e^{-i(\mathbf{J} \cdot \phi + \mathbf{K} \cdot \varphi)} \quad , \quad (1.67)$$

de la definición de A^j y B^j

$$J^j = J_R^j + J_L^j \quad , \quad K^j = i(J_R^j - J_L^j) \quad , \quad (1.68)$$

por lo que podemos reescribir la transformación de Lorentz como

$$\Lambda(\phi, \varphi) = e^{-i\mathbf{J}_R \cdot (\phi + i\varphi)} e^{-i\mathbf{J}_L \cdot (\phi - i\varphi)} \quad . \quad (1.69)$$

Ya que J_R^i y J_L^j conmutan, podemos separar las exponenciales

$$\Lambda(\phi, \varphi) = e^{-i\mathbf{J}_R \cdot (\phi + i\varphi)} e^{-i\mathbf{J}_L \cdot (\phi - i\varphi)} \quad . \quad (1.70)$$

Al tener J_R^j y J_L^j el mismo *bracket* de Lie que $SU(2)$, entonces cada transformación

$$e^{-i\mathbf{J}_R \cdot (\phi + i\varphi)} \quad , \quad e^{-i\mathbf{J}_L \cdot (\phi - i\varphi)} \quad , \quad (1.71)$$

tiene la misma regla de multiplicación que $SU(2)$, la diferencia con $SU(2)$ es que los parámetros de la transformación son complejos, entonces

$$e^{-i\mathbf{J}_R \cdot (\phi + i\varphi)} \sim SU_R(2) \quad , \quad e^{-i\mathbf{J}_L \cdot (\phi - i\varphi)} \sim SU_L(2) \quad , \quad (1.72)$$

dado que el grupo de Lorentz no es unitario. Por lo anterior, el grupo propio ortocrono de Lorentz puede ser caracterizado como

$$SO^\dagger(1, 3) \sim SU_R(2) \otimes SU_L(2) \quad , \quad (1.73)$$

Las *irreps* de $SO^\dagger(1, 3)$, también son *irreps* de $SU_R(2) \otimes SU_L(2)$. Es por esta “factorización” que se inició con las representaciones irreducibles del grupo de rotaciones. Bajo paridad, los grupos generados por J_R^j y J_L^j se transforman como

$$SU_R(2) \longrightarrow SU_L(2) \quad , \quad (1.74)$$

$$SU_L(2) \longrightarrow SU_R(2) \quad . \quad (1.75)$$

Ya que los generadores J_R^j y J_L^j satisfacen las mismas reglas de conmutación que los generadores de $SU(2)$, los valores propios de \mathbf{J}_R^2 y J_R^3 son los mismos que los de \mathbf{J}^2 y J^3 , lo mismo ocurre para el grupo izquierdo. Para poder describir completamente al grupo de Lorentz necesitamos dos números, j_R y j_L , estos son los valores propios de los generadores $\mathbf{J}_{(R/L)}^2$. Las *irreps* del grupo de Lorentz son comúnmente denotadas como

$$(\mathbf{j}_R, \mathbf{j}_L) \quad .$$

Las representaciones de la forma $(\mathbf{j}_R, \mathbf{j}_L)$ no tienen momento angular bien definido. Para tener momento angular bien definido es necesario que alguno de los valores propios sea 0, las representaciones $(\mathbf{j}_R, \mathbf{0})$ y $(\mathbf{0}, \mathbf{j}_L)$, sí tienen momento angular bien definido, pero no tiene paridad bien definida. En cada $(\mathbf{j}_R, \mathbf{j}_L)$ podemos encontrar diferentes tipos de objetos, por ejemplo:

$(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \longrightarrow$ Escalares con espín cero como el bosón de Higgs, Kaones, Piones, etc.

$(\frac{1}{2}, \mathbf{0}) \longrightarrow$ Espinores derechos de espín 1/2.

$(\mathbf{0}, \frac{1}{2}) \longrightarrow$ Espinores izquierdos de espín 1/2.

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \longrightarrow$ Partículas de tipo cuadvivector con espín 1 como el fotón, gluón, W^\pm y bosón Z.

$\left. \begin{array}{l} (\frac{1}{2}, \mathbf{1}) \\ (\mathbf{1}, \frac{1}{2}) \end{array} \right\} \longrightarrow$ Objetos con espín 3/2 o 1/2.

$(\mathbf{1}, \mathbf{1}) \longrightarrow$ Objetos con espín, 0, 1 o 2 como los gravitones.

Bajo paridad, las *irreps* se transforman como

$$(\mathbf{j}_R, \mathbf{j}_L) \longrightarrow (\mathbf{j}_L, \mathbf{j}_R) \quad , \quad (1.76)$$

en general las *irreps* no son invariantes bajo transformaciones de paridad a menos que $j_R = j_L$. Una manera de construir espacios invariantes bajo paridad es tomando la suma directa

$$(\mathbf{j}_R, \mathbf{j}_L) \oplus (\mathbf{j}_L, \mathbf{j}_R) \quad , \quad \mathbf{j}_R \neq \mathbf{j}_L \quad ,$$

las representaciones de la forma $(\mathbf{j}, \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{0}, \mathbf{j})$, además de ser invariantes bajo paridad tienen momento angular bien definido, se les llama estados de espín puro. Si paridad es una buena simetría, las *irreps* que deberíamos utilizar son

$$(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \quad \text{ó} \quad (\mathbf{j}, \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{0}, \mathbf{j}) \quad ,$$

por ejemplo:

- $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \quad \longrightarrow \quad$ Klein Gordon, 0 - espinores, esto es, partículas escalares con espín 0.
- $(\frac{1}{2}, \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{0}, \frac{1}{2}) \quad \longrightarrow \quad$ Dirac, 1/2 - espinores, esto es, partículas espinoriales con espín 1/2 como leptones, quarks, protones, neutrones.
- $(\frac{3}{2}, \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{0}, \frac{3}{2}) \quad \longrightarrow \quad$ La ecuación de evolución relacionada con esta *irrep* contiene derivadas de tercer orden en el tiempo y energías no acotadas, por lo tanto no se considera una *irrep* física.
- $(\mathbf{1}, \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{0}, \mathbf{1}) \quad \longrightarrow \quad$ Weinberg, 1 - espinores, esto es, partículas con espín 1. Hasta el momento no se han detectado partículas descritas bajo esta *irrep*, en este trabajo de tesis se propone que la materia oscura podría pertenecer a esta *irrep*.
- $(\frac{1}{2}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \frac{1}{2}) \quad \longrightarrow \quad$ Rarita-Schwinger, partículas de tipo espín-vector masivas, en ocasiones llamada electromagnetismo masivo. Predice partículas super lumínicas en presencia de un campo electromagnético, por lo que esta *irrep* no se considera física. Además, el momento angular no está bien definido.

Cada una de estas representaciones tiene una ecuación de evolución asociada para los estados de espín descritos en la representación. Es muy importante observar que hay diferentes representaciones irreducibles del grupo de Lorentz en las que podemos encontrar partículas con el **mismo espín** pero **diferente física**.

2. Teoría de Campo

Discutamos ahora las *irreps* generadas para $j = 0, 1/2, 1$. Para comenzar, se deriva la ecuación de evolución para los campos de cada representación partiendo de estados con paridad bien definida en un marco en reposo, al efectuar un *boost* a un marco en el que el campo tenga momento general $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ obtenemos la ecuación de evolución para los campos. Después plantearemos el formalismo Lagrangiano para estas ecuaciones.

Todo sistema físico tiene asociada una cierta densidad Hamiltoniana (que llamaremos simplemente Hamiltoniano) \mathcal{H} el cual permite obtener la evolución temporal del sistema. Una desventaja de utilizar el Hamiltoniano para describir un sistema, es que no es invariante de Lorentz. En general, en cualquier teoría relativista nos gustaría que las ecuaciones sean explícitamente invariantes de Lorentz. Por lo anterior, es conveniente partir de una densidad Lagrangiana (que llamaremos simplemente Lagrangiano) \mathcal{L} . El Lagrangiano de una teoría debe ser escalar de Lorentz. Es posible encontrar el Lagrangiano partiendo de un Hamiltoniano dado mediante una transformación de Legendre, por lo que ambas descripciones son equivalentes. Ambos formalismos son útiles para establecer la teoría de campos cuánticos, lo que aquí no se discute. El resultado de interés para nosotros de una teoría de campo cuántico son las reglas de Feynman, estas se pueden leer fácilmente a partir del Lagrangiano y nos permiten calcular la probabilidad de que ocurra una interacción particular entre campos.

También se discutirán las propiedades de transformación del Lagrangiano ante diferentes tipos de transformaciones y las simetrías asociadas a las mismas. Una de estas simetrías llamada de *gauge*, es de fundamental importancia en la teoría de campos cuánticos.

Para concluir, se discute un de las teorías de campo cuántico más sencilla, la Electrodinámica Cuántica.

2.1. La representación (0,0)

Esta representación del grupo de Lorentz es la más sencilla de todas. Los campos descritos en esta representación son de espín 0. Los estados en esta representación no se transforman bajo Lorentz, por esta razón también son llamados escalares. En esta representación $j = 0$, solo hay un posible estado de espín. Todos los operadores en esta representación son nulos

$$J^1 = J^2 = J^3 = \mathbf{J}^2 = 0 \quad , \quad (2.1)$$

el operador de rotaciones es la identidad,

$$D^0 = e^{-i\theta \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}} = 1 \quad . \quad (2.2)$$

La ecuación asociada a esta *irrep* es la llamada ecuación de Klein Gordon. Para obtener esta ecuación, basta con cuantizar a primer nivel la relación de dispersión de Einstein, es decir, reemplazar

los observables y variables dinámicas por los correspondientes operadores de la mecánica cuántica y actuar los operadores sobre una función de onda $\phi(x^\mu)$

$$E^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2 \quad \longrightarrow \quad -\partial^0 \partial_0 \phi(x^\mu) = (-\nabla^2 + m^2)\phi(x^\mu) \quad , \quad (2.3)$$

$$(\partial^0 \partial_0 + \partial^j \partial_j + m^2)\phi(x^\mu) = 0 \quad , \quad (2.4)$$

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi(x^\mu) = 0 \quad , \quad (2.5)$$

esta ecuación tiene soluciones de energía positiva y negativa

$$E = \pm \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} \quad . \quad (2.6)$$

No se espera que un partícula libre tenga energía negativa, además, esto implica “probabilidades” no definidas positivas. El verdadero problema no son las energías negativas como tal, en realidad es que no hay un límite inferior de energía, por lo que una partícula siempre puede decaer a un estado más bajo de energía, emitiendo energía en el proceso, esto no se observa en la naturaleza.

2.2. La representación $(\frac{1}{2}, \mathbf{0}) \oplus (0, \frac{1}{2})$

Esta representación es llamada de Dirac, describe estados de espín 1/2. Los estados que forman la base de cada subespacio son

$$\left\{ \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \quad , \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right\} \quad : \quad \text{base ordenada que genera los subespacios} \quad . \quad (2.7)$$

En esta representación, los operadores toman la forma

$$J^j = \frac{\sigma^j}{2} \quad , \quad \mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \quad , \quad (2.8)$$

donde σ^j son las matrices de Pauli. El operador de rotaciones es

$$D^{\frac{1}{2}}(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) - in^3 \sin(\theta/2) & -i(n^1 - in^2) \sin(\theta/2) \\ -i(n^1 + in^2) \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) + in^3 \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \quad . \quad (2.9)$$

Existen diversas formas de derivar la ecuación de evolución para los espinores en esta representación, el procedimiento histórico que siguió Dirac, parte de nuevo con la relación de dispersión de Einstein. Dirac observó que los estados de energía negativa provenían de la derivada temporal de segundo orden en la ecuación de Klein Gordon. Con el objetivo de construir una ecuación de evolución con derivada lineal en el tiempo, factorizó la relación de dispersión mediante las llamadas matrices γ^μ de Dirac. Además

de esto, en la relatividad especial tiempo y espacio tienen la misma relevancia, la ecuación debía ser también de primer orden en las derivadas espaciales. Por lo anterior, las derivadas sobre las coordenadas deberían ser todas del mismo orden. La ecuación de Dirac es

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x^\mu) = 0 \quad , \quad (2.10)$$

además, $\psi(x^\mu)$ satisface la ecuación de Klein-Gordon. Dirac encontró la siguiente forma explícita de las matrices γ^μ

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad , \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad , \quad (2.11)$$

esta manera de expresar las matrices se conoce como representación de Dirac, sin embargo, existen otras representaciones como la quiral (también conocida como representación de Weyl) y de Majorana. Independientemente de la representación, las matrices de Dirac siempre cumplen con la regla de anticonmutación en (2.11).

Aunque Dirac consiguió que la derivada en el tiempo fuera lineal, los estados de energía negativa no desaparecieron y con ello tampoco el problema de estados de energía negativa no acotada. Es bien sabido que, si una nueva ecuación de evolución relativista es introducida, los límites no relativistas deberían reducir la nueva teoría a la teoría previa. Al tomar el límite no relativista, Dirac encontró que su ecuación se reduce a la ecuación de Pauli con un potencial generado por un campo electromagnético. La ecuación de Pauli describe la evolución de partículas de espín 1/2 en presencia de un campo electromagnético. De este modo, Dirac llegó a la conclusión que su ecuación debía también describir partículas de espín 1/2 pero en un régimen relativista. Para esta época, las únicas partículas fundamentales conocidas de espín 1/2 eran los electrones, de carga negativa, se consideraba (correctamente) que estos, son estados de energía positiva. Las partículas de espín semi-entero obedecen el principio de exclusión de Pauli. Basado en este principio, Dirac propuso una solución al problema de energías negativas no acotadas. La idea era que, el vacío es en realidad un estado en el que todos los posibles estados de energía negativa están ya ocupados y los de energía positiva disponibles. Al remover un estado de energía negativa, el “hoyo” creado en este mar de estados, se comportaría como una partícula con carga positiva de tal modo que al interactuar con una partícula de carga negativa, se aniquilarían liberando energía. Posteriormente, fue señalado por otros que estos “hoyos” representarían partículas de antimateria. La antimateria fue descubierta en 1932 por Carl Anderson. A pesar del éxito obtenido, esta teoría conocida como “Mar de Dirac” o llamada también “Teoría hoyo”, tenía otras dificultades¹³. Por ejemplo, para bosones, partículas con espín entero que no obedecen el principio de exclusión de Pauli, el Mar de Dirac no elimina el problema de energías negativas no acotadas. Además, la ecuación de Dirac, concebida para describir una sola partícula, al introducir el mar de Dirac se convierte en una teoría de muchas partículas y no solo eso, sino que el número de partículas es ahora fluctuante. Para resolver este problema, se deben cuantizar los campos, es decir, promoverla a una teoría de campo cuántico. En este caso, la teoría de Mar de Dirac es reemplazada por la “Electrodinámica Cuántica”¹⁴, en esta teoría de campo cuántico la antimateria es considerada una partícula real al igual que el electrón, y no un hoyo en el Mar de Dirac. Al cuantizar una teoría, las funciones de onda se promueven a operadores que representan los campos cuánticos y el espacio de Hilbert se promueve a un espacio de Fock. Existen varios esquemas para

¹³Referencias históricas tomadas de [70], capítulo 1.

¹⁴Esta teoría de campo cuántico es discutida en la sección 2.6.

cuantizar una teoría, en este trabajo no se discute ninguno y se trabaja directamente con las teorías de campo cuántico correspondientes para desarrollar los cálculos. En general, una vez cuantizada la teoría, la estructura de la ecuación de evolución para los campos no cambia. También debemos recordar que todo campo cuántico independientemente de su naturaleza (es decir, independiente de la representación del grupo de Lorentz que lo describa) debe obedecer la relación de dispersión de Einstein, por lo tanto, también la ecuación de Klein Gordon.

Discutamos ahora un acercamiento moderno para derivar la ecuación de Dirac basado en estados de paridad bien definida. Recordemos que

$$(\frac{1}{2}, \mathbf{0}) \longrightarrow 1/2 \text{ Espinores derechos, dos grados de libertad} \quad , \quad (2.12)$$

$$(\mathbf{0}, \frac{1}{2}) \longrightarrow 1/2 \text{ Espinores izquierdos, dos grados de libertad} \quad , \quad (2.13)$$

la suma directa de subespacios tiene dimensión 4, así que escribimos un espinor en la representación de Dirac como

$$\psi(p) = \begin{pmatrix} \psi_R(p) \\ \psi_L(p) \end{pmatrix} \quad , \quad (2.14)$$

ψ_R y ψ_L son las componentes “derecha” e “izquierda” del campo, son proporcionales a los espinores de dos componentes (en ocasiones llamados espinores de Weyl) que codifican la información de orientación de espín. Esta propiedad izquierda o derecha de los campos es llamada quiralidad, los espinores derechos se transforman bajo las *irreps* de $SU(2)_R$ y los izquierdos bajo las *irreps* de $SU(2)_L$. Estas representaciones se transforman de manera idéntica bajo rotaciones, pero tienen propiedades diferentes en diferentes marcos de referencia. Para comenzar, definamos el operador de paridad intrínseca en el marco de reposo como

$$\Pi\psi(0) = \begin{pmatrix} \psi_L(0) \\ \psi_R(0) \end{pmatrix} \quad . \quad (2.15)$$

Si aplicamos un par de transformaciones de paridad sucesivamente, las coordenadas no cambian, $\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x}$, por lo que

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \Pi^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad . \quad (2.16)$$

Los valores propios de este operador son ± 1 con multiplicidad 2. Siguiendo a Weinberg, las partículas deben ser descritas por estados propios con la mayor cantidad posible de números cuánticos, espín, paridad, carga, masa, etc. La paridad de una partícula en reposo se define como $+1$ por convención, el espinor debe satisfacer la ecuación de valor propio

$$\Pi\psi(0) = \psi(0) \quad . \quad (2.17)$$

Aplicamos un *boost* hacia un marco de referencia moviéndose con velocidad $-\mathbf{v}$, si el marco de referencia se mueve a la izquierda, entonces la partícula se mueve hacia la derecha con velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m\gamma$

$$B(-\mathbf{v})\Pi\psi(0) = B(-\mathbf{v})\psi(0) \quad . \quad (2.18)$$

Utilicemos el hecho de que $B(-\mathbf{v})^{-1}B(-\mathbf{v}) = \mathbb{1}$

$$B(-\mathbf{v})\Pi B(-\mathbf{v})^{-1}\psi(p) = \psi(p) \quad , \quad (2.19)$$

y calculemos la forma explícita de este operador,

$$B(-\mathbf{v}) = B_R(-\mathbf{v}) \otimes \mathbb{1} \oplus \mathbb{1} \otimes B_L(-\mathbf{v}) \quad , \quad (2.20)$$

$$= \begin{pmatrix} B_R(-\mathbf{v}) & 0 \\ 0 & B_L(-\mathbf{v}) \end{pmatrix} \quad . \quad (2.21)$$

Los operadores de *boost* para espinores izquierdos y derechos son

$$B_L(-\mathbf{v}) = B_R(\mathbf{v}) = e^{\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \varphi/2} = \cosh(\varphi/2) + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \sinh(\varphi/2) \quad , \quad (2.22)$$

$$B_R(-\mathbf{v}) = B_L(\mathbf{v}) = e^{-\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \varphi/2} = \cosh(\varphi/2) - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \sinh(\varphi/2) \quad . \quad (2.23)$$

Necesitamos también el inverso

$$B(-\mathbf{v})^{-1} = B(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} B_R(\mathbf{v}) & 0 \\ 0 & B_L(\mathbf{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_L(-\mathbf{v}) & 0 \\ 0 & B_R(-\mathbf{v}) \end{pmatrix} \quad , \quad (2.24)$$

el operador en la ecuación de valor propio toma la forma

$$B(-\mathbf{v})\Pi B(-\mathbf{v})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B_R^2(-\mathbf{v}) \\ B_L^2(-\mathbf{v}) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_L^2(\mathbf{v}) \\ B_R^2(\mathbf{v}) & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (2.25)$$

donde

$$B_L^2(-\mathbf{v}) = \cosh(\varphi) + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \sinh(\varphi) \quad , \quad B_R^2(-\mathbf{v}) = \cosh(\varphi) - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \sinh(\varphi) \quad . \quad (2.26)$$

Utilicemos las siguientes relaciones

$$\cosh(\varphi) = \gamma = \frac{p^0}{m} \quad , \quad \sinh(\varphi) = \gamma v = \frac{|\mathbf{p}|}{m} \quad , \quad (2.27)$$

escribamos también $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{n}}|\mathbf{p}|$, los operadores de *boost* toman la forma

$$B_L^2(-\mathbf{v}) = \frac{1}{m} (p^0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \quad , \quad B_R^2(-\mathbf{v}) = \frac{1}{m} (p^0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \quad . \quad (2.28)$$

Por lo tanto, la ecuación de valor propio es

$$B(-\mathbf{v})\Pi B(-\mathbf{v})^{-1}\psi(p) = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 0 & p^0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ p^0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R(p) \\ \psi_L(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_R(p) \\ \psi_L(p) \end{pmatrix} \quad , \quad (2.29)$$

reescribiendo lo anterior del siguiente modo

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} p^0 - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} p^j \right] \psi(p) = m\psi(p) \quad , \quad (2.30)$$

y definiendo las matrices

$$\gamma_0 = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (2.31)$$

obtenemos la ecuación de Dirac

$$(p_\mu \gamma^\mu - m)\psi(p) = 0 \quad . \quad (2.32)$$

La forma de las soluciones de esta ecuación depende de la representación elegida para las matrices gamma. Por ejemplo, en la representación de Dirac, las soluciones son

$$u^s(p) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \xi^s \end{pmatrix} \quad , \quad v^s(p) = -\sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \eta^s \\ \eta^s \end{pmatrix} \quad , \quad (2.33)$$

donde ξ^s y η^s son espinores de Weyl. Para soluciones que representan partículas $\psi(p) = e^{-ip \cdot x} u^s(p)$ y para antipartículas $\psi(p) = e^{ip \cdot x} v^s(p)$. También es posible resolver la ecuación utilizando estados de

helicidad¹⁵, por ejemplo para u^s la solución es (también en la representación de Dirac)

$$u^\lambda(p) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} u_L^\lambda \\ \lambda \sqrt{E-m} u_L^\lambda \end{pmatrix} , \quad (2.34)$$

con $\lambda = \pm 1$ los valores propios de helicidad y u_L^λ estados propios del operador de helicidad

$$\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} u_L^\lambda = \lambda u_L^\lambda . \quad (2.35)$$

2.3. La representación $(1,0)\oplus(0,1)$

Esta representación no tiene un nombre común, sin embargo, Weinberg la estudió ampliamente. Recientemente ha sido estudiada también en [59, 75, 76]. Los subespacios en esta representación son generadas con $j = 1$ y los tres posibles valores de espín son -1, 0 y 1. Los estados que forman la base de cada subespacio son

$$\left\{ |1, 1\rangle , |1, 0\rangle , |1, -1\rangle \right\} : \text{ base ordenada que genera los subespacios } . \quad (2.36)$$

Los operadores toman la forma

$$J^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad J^2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad J^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad (2.37)$$

$$\mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \quad (2.38)$$

Cuando encontramos la base del espacio, se elige por convención diagonalizar J^3 , pero es válido diagonalizar también J^1 o J^2 . Los valores propios serán los mismos, pues no hay una dirección con preferencia. Podemos diagonalizar en la dirección $\hat{\mathbf{n}}$ donde $\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ tendrá los mismos valores propios 1, 0 y -1. El polinomio característico que diagonaliza $\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ es

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \lambda \mathbb{1}) = 0 . \quad (2.39)$$

El teorema de Cayley–Hamilton asegura que toda matriz cuadrada satisface su propio polinomio característico. Por lo tanto, podemos decir que

$$P(\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}) = (\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}})^3 - \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 , \quad (2.40)$$

¹⁵Espín medido en la dirección de movimiento.

con lo anterior, es sencillo verificar las siguientes identidades

$$(\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}})^{2n} = (\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \quad , \quad (\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}})^{2n+1} = \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad , \quad n = 1, 2, 3, 4, 5 \dots \quad . \quad (2.41)$$

Separando la serie de Taylor en términos pares e impares, el operador de rotación toma la forma

$$D^1(\theta) = e^{-i\theta \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k \theta^k}{k!} (\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}})^k = \mathbb{1} + (\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 (\cos(\theta) - \mathbb{1}) - i(\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \sin(\theta) \quad . \quad (2.42)$$

Los operadores de *boost* son

$$B_R(\mathbf{v}) = B_L(-\mathbf{v}) = e^{\varphi \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}} = \frac{1}{m} \left(m + (\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 (p^0 - m) + (\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}) |\mathbf{p}| \right) \quad , \quad (2.43)$$

$$B_L(\mathbf{v}) = B_R(-\mathbf{v}) = e^{-\varphi \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}} = \frac{1}{m} \left(m + (\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 (p^0 - m) - (\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}) |\mathbf{p}| \right) \quad . \quad (2.44)$$

Tomando $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$, los cuadrados toman la forma

$$B_R^2(\mathbf{v}) = \frac{1}{m^2} \left[p^0 p^0 - |\mathbf{p}|^2 + 2 \left((\mathbf{J} \cdot \mathbf{p})^2 + p^0 (\mathbf{J} \cdot \mathbf{p}) \right) \right] \quad , \quad (2.45)$$

$$B_L^2(\mathbf{v}) = \frac{1}{m^2} \left[p^0 p^0 - |\mathbf{p}|^2 + 2 \left((\mathbf{J} \cdot \mathbf{p})^2 - p^0 (\mathbf{J} \cdot \mathbf{p}) \right) \right] \quad . \quad (2.46)$$

La ecuación de valor propio que los campos deben obedecer es

$$\begin{pmatrix} 0 & p^0 p^0 - |\mathbf{p}|^2 + 2 \left((\mathbf{J} \cdot \mathbf{p})^2 - p^0 (\mathbf{J} \cdot \mathbf{p}) \right) \\ p^0 p^0 - |\mathbf{p}|^2 + 2 \left((\mathbf{J} \cdot \mathbf{p})^2 + p^0 (\mathbf{J} \cdot \mathbf{p}) \right) & 0 \end{pmatrix} \Psi(p) = m^2 \Psi(p) \quad , \quad (2.47)$$

observando que $2(\mathbf{J} \cdot \mathbf{p})^2 = \{J^i, J^j\} p^i p^j$, reescribimos lo anterior como

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} p^0 p^0 + 2 \begin{pmatrix} 0 & -J^j \\ J^j & 0 \end{pmatrix} p^0 p^j + \begin{pmatrix} 0 & g^{ij} + \{J^i, J^j\} \\ g^{ij} + \{J^i, J^j\} & 0 \end{pmatrix} p^i p^j - m^2 \right] \Psi(p) = 0 \quad , \quad (2.48)$$

definiendo los operadores $S^{\mu\nu}$

$$S^{00} = \Pi = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad S^{0j} = S^{j0} = \begin{pmatrix} 0 & -J^j \\ J^j & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$S^{ij} = S^{ji} = \begin{pmatrix} 0 & g^{ij} + \{J^i, J^j\} \\ g^{ij} + \{J^i, J^j\} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (2.49)$$

la ecuación de evolución toma la forma

$$(S^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - m^2)\Psi(p) = 0 \quad . \quad (2.50)$$

Los operadores $S^{\mu\nu}$ son el análogo a las matrices γ^μ en la representación de Dirac. Esta ecuación fue derivada en una primera instancia por Weinberg [77] mediante un procedimiento diferente, pero hay un problema, la ecuación contiene soluciones de masa imaginaria y velocidad superlumínica. Para observar esto, debemos verificar si la ecuación obedece la ecuación de Klein-Gordon. Observando que

$$(\mathbf{J} \cdot \mathbf{p})^{2n} = |\mathbf{p}|^{2(n-1)}(\mathbf{J} \cdot \mathbf{p})^2 \quad , \quad (\mathbf{J} \cdot \mathbf{p})^{2n+1} = |\mathbf{p}|^{2n}(\mathbf{J} \cdot \mathbf{p}) \quad , \quad (2.51)$$

es sencillo verificar que

$$(S(p))^2 \equiv (S^{\mu\nu} p_\mu p_\nu)^2 = (p_\alpha p^\alpha)^2 = p^4 \quad . \quad (2.52)$$

Multiplicando $S(p) - m^2$ a la izquierda de (2.50) obtenemos la siguiente ecuación

$$(p^4 - m^4)\Psi(p) = 0 \quad , \quad (2.53)$$

esto puede ser escrito como

$$(p^2 + m^2)(p^2 - m^2)\Psi(p) = 0 \quad , \quad (2.54)$$

por lo tanto, existe un conjunto de soluciones tal que

$$(p^2 + m^2)\Psi(p) = 0 \quad , \quad (2.55)$$

estas soluciones están fuera de la capa de masas. Para eliminar este problema, debemos ser más cautelosos al momento de construir la ecuación de valor propio para estados con paridad bien definida. Los proyectores en estados de paridad bien definida son

$$\tilde{\mathbb{P}}_+(0) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \Pi) \quad , \quad \tilde{\mathbb{P}}_+(p) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{S(p)}{m^2}\right) \quad , \quad (2.56)$$

la ecuación de valor propio a la que aplicamos un *boost* para obtener la ecuación de Weinberg es

$$\Pi\Psi(p) = \Psi(p) \quad , \quad (2.57)$$

esta ecuación es equivalente a

$$\tilde{\mathbb{P}}_+(0)\Psi(p) = \Psi(p) \quad . \quad (2.58)$$

Para estados fuera de su capa de masas, el operador $\tilde{\mathbb{P}}_+$ deja de ser un verdadero proyector de paridad. Además de esto, debemos de considerar la proyección en la orbita de Poincaré deseada. Los operadores de proyección de masa y paridad físicamente correctos son

$$\frac{p^2}{m^2}\mathbb{P}_\pm(p) = \frac{1}{2m^2}(p^2 \pm S(p)) \quad , \quad (2.59)$$

de este modo, la ecuación de valor propio en la que debemos efectuar un *boost* es

$$\frac{p^2}{m^2}\mathbb{P}_\pm(0)\Psi(0) = \Psi(0) \quad , \quad (2.60)$$

$$\frac{1}{2}B(-\mathbf{v})(p^2 + S(0))B^{-1}(-\mathbf{v})\Psi(p) = m^2\Psi(p) \quad , \quad (2.61)$$

$$\left(\frac{1}{2}(p^2 + S(p)) - m^2\right)\Psi(p) = 0 \quad , \quad (2.62)$$

definiendo $\Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(g^{\mu\nu} + S^{\mu\nu})$ escribimos la ecuación como

$$\left(\Sigma^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - m^2\right)\Psi(p) = 0 \quad . \quad (2.63)$$

Si multiplicamos $1/2(p^2 - S(p)) - m^2$ a la izquierda de (2.62) es sencillo verificar que esta ecuación cumple con la ecuación de Klein-Gordon sin soluciones extra fuera de la capa de masa

$$\left(\frac{1}{2}(p^2 - S(p)) - m^2\right)\left(\frac{1}{2}(p^2 + S(p)) - m^2\right)\Psi(p) = 0 \quad , \quad (2.64)$$

$$(p^2 - m^2)\Psi(p) = 0 \quad . \quad (2.65)$$

En esta representación, los espinores de Weyl son de tres componentes, por lo que cada parte quiral izquierda y derecha de los campos, consta de tres componentes también. En total, los espinores en esta representación tienen seis componentes. Ha sido mostrado en [75] que esta teoría es cuantizable. Esto nos permite tomar los campos en esta representación y estudiar los posibles modelos permitidos bajo distintas reglas de simetría e invariancia de Lorentz.

En trabajos recientes [75, 78], se ha mostrado que la base covariante basada en paridad de la representación $(\mathbf{1}, \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ contiene lo siguiente:

- Dos operadores escalares de Lorentz, la matriz unitaria de 6×6 y el operador de quiralidad χ .
- Seis operadores que se transforman en la representación $(\mathbf{1}, \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ que en conjunto forman un tensor antisimétrico $M^{\mu\nu}$ cuyas componentes corresponden a los generadores del grupo de Lorentz.
- Un par de tensores matriciales simétricos de traza nula que se transforman bajo la representación $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ denotados por $S^{\mu\nu}$ y $\chi S^{\mu\nu}$.
- Un operador tensorial $C^{\alpha\beta\mu\nu}$ que se transforma bajo la representación $(\mathbf{2}, \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{0}, \mathbf{2})$.

La forma explícita de los operadores y sus relaciones de conmutación y anticonmutación son algo complicadas. Recordemos que estas relaciones son independientes de la representación elegida para los operadores, en particular, se puede mostrar que existe un mapeo entre las componentes espinoriales del campo ψ y un tensor antisimétrico de rango 2. En esta representación, cada índice espinorial a , es reemplazado por un par de índices de Lorentz $\alpha\beta$. En este trabajo se utilizó esta representación ya que, con la ayuda de FEYN CALC en Mathematica 12, es sencillo efectuar los cálculos necesarios. En esta representación los operadores toman la forma [59]

$$(\mathbb{1})_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} \left(g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} \right) \quad , \quad (2.66)$$

$$(\chi)_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{i}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad , \quad (2.67)$$

$$(M_{\mu\nu})_{\alpha\beta\gamma\delta} = -i \left(g_{\mu\gamma} \mathbb{1}_{\alpha\beta\nu\delta} + g_{\mu\delta} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\nu} - g_{\gamma\nu} \mathbb{1}_{\alpha\beta\mu\delta} - g_{\delta\nu} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\mu} \right) \quad , \quad (2.68)$$

$$(S_{\mu\nu})_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\mu\nu} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\delta} - g_{\mu\gamma} \mathbb{1}_{\alpha\beta\nu\delta} - g_{\mu\delta} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\nu} - g_{\gamma\nu} \mathbb{1}_{\alpha\beta\mu\delta} - g_{\delta\nu} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\mu} \quad , \quad (2.69)$$

la expresión para $C^{\alpha\beta\mu\nu}$ puede calcularse utilizando las relaciones anteriores y relaciones de anticonmutación de los $M^{\mu\nu}$.

2.4. Simetrías y ecuaciones de Euler - Lagrange

Como ya se mencionó, la teoría de campo cuántico suele escribirse en términos de Lagrangianos ya que este es explícitamente invariante de Lorentz. La dinámica e interacciones en un sistema físico es determinada por el principio de mínima acción. La acción se define como

$$S = \int_{\Delta t} L dt = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi) d^4x \quad , \quad (2.70)$$

con Ω una región del espacio-tiempo y $\mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi)$ una densidad Lagrangiana que depende únicamente del campo $\phi(x^{\mu})$ y sus primeras derivadas. Como ya se comentó, derivadas de orden más alto pueden resultar en energías negativas no acotadas y decaimiento del vacío. La física del sistema se obtiene mediante el principio de mínima acción, este último dicta que la variación de la acción δS sea nula, esto es

$$\delta S = 0 \quad , \quad (2.71)$$

para la configuración física del campo. Realizando una variación del campo dada por

$$\phi \longrightarrow \phi + \delta\phi \quad , \quad \partial_{\mu}\phi \longrightarrow \partial_{\mu}\phi + \partial_{\mu}(\delta\phi) \quad , \quad (2.72)$$

donde $\delta\phi$ es una pequeña perturbación. Se impone además que los campos cumplan las mismas condiciones de frontera, de manera que $\delta\phi = 0$ en la frontera. La variación de la acción es

$$\delta S = \int_{\Omega} \left(\mathcal{L}(\phi + \delta\phi, \partial_{\mu}\phi + \partial_{\mu}(\delta\phi)) - \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi) \right) d^4x \quad , \quad (2.73)$$

efectuando una expansión

$$\delta S = \int_{\Omega} \left(\mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \partial_{\mu}(\delta\phi) - \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi) \right) d^4x \quad , \quad (2.74)$$

integrando por partes el penúltimo término

$$\delta S = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \right) \delta\phi + \partial_{\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \delta\phi \right) \right) d^4x \quad , \quad (2.75)$$

el último término es una divergencia sobre el espacio-tiempo, al integrar queda solamente la evaluación en la frontera de integración $\partial\Omega$. En esta región asintótica, $\delta\phi = 0$ ¹⁶, por lo que este último término es nulo. Imponiendo el principio de mínima acción obtenemos que

$$\delta S = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \right) \right) \delta\phi d^4x = 0 \quad , \quad (2.76)$$

¹⁶Este es un argumento equivalente al utilizado para las funciones de onda de cuadrado integrable en mecánica cuántica.

de este modo obtenemos las llamadas ecuaciones de evolución de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \quad . \quad (2.77)$$

Los Lagrangianos para las ecuaciones antes mencionadas son

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 : \text{Klein-Gordon, campo escalar real} \quad , \quad (2.78)$$

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - m^2 |\phi|^2 : \text{Klein-Gordon, campo escalar cargado (complejo)} \quad , \quad (2.79)$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi : \text{Dirac, campo espinorial - 1/2} \quad , \quad (2.80)$$

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \bar{\Psi}) \sum^{\mu\nu} (\partial_\nu \Psi) - m^2 \bar{\Psi} \Psi : \text{Campo espinorial - 1 (también llamado tensorial)} \quad , \quad (2.81)$$

donde $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ y $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger S^{00}$.

Consideremos por ejemplo el campo complejo $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ y una transformación global sobre los dos grados de libertad ϕ y ϕ^* , esto es

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi e^{-i\alpha} \quad , \quad \phi^* \longrightarrow \phi'^* = \phi^* e^{i\alpha} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad , \quad (2.82)$$

el Lagrangiano se transforma como

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \longrightarrow \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi') \quad , \quad (2.83)$$

es claro que el lagrangiano en (2.79) es invariante y por lo tanto también la acción, cuando la acción queda invariante ante una transformación de coordenadas y/o campos, se dice que tenemos una simetría. Si el Lagrangiano depende de varios campos ϕ_n , la variación de la acción está dada por

$$\frac{\delta S}{\delta \alpha} = \int_\Omega \sum_n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_n} \frac{\delta \phi_n}{\delta \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_n)} \frac{\delta (\partial_\mu \phi_n)}{\delta \alpha} \right) d^4 x = 0 \quad . \quad (2.84)$$

Mediante un procedimiento similar al utilizado para encontrar las ecuaciones de evolución y utilizando el hecho de que estas últimas se cumplen, se obtiene que

$$\frac{\delta S}{\delta \alpha} = \int_\Omega \sum_n \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_n)} \frac{\delta \phi_n}{\delta \alpha} \right) d^4 x = 0 \quad . \quad (2.85)$$

Se define una corriente conservada de Noether como

$$J^\mu = \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_n)} \frac{\delta \phi_n}{\delta \alpha} \quad , \quad \partial_\mu J^\mu = 0 \quad . \quad (2.86)$$

Es llamada corriente conservada ya que la carga Q generada por la simetría bajo las transformaciones definidas en (2.82) se conserva, esto es

$$Q = \int_V J_0 d^3x \quad (2.87)$$

$$\text{y} \quad \frac{dQ}{dt} = \int_V \frac{\partial J_0}{\partial t} d^3x = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} d^3x = 0 \quad . \quad (2.88)$$

La última integral en la ecuación anterior es sobre una divergencia total y es nula al asumir de nuevo que en la región asintótica los campos se desvanecen.

Las corrientes de Noether asociadas a la simetría bajo transformaciones $U(1)$ para campos escalares, espinoriales y tensoriales (de espín 1) respectivamente son

$$J^\mu = -i(\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi) \quad , \quad (2.89)$$

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad , \quad (2.90)$$

$$J^\nu = -i(\partial_\mu \bar{\Psi} \Sigma^{\mu\nu} \Psi - \bar{\Psi} \Sigma^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi) \quad . \quad (2.91)$$

La conservación de la carga Q en (2.88), es un caso particular del conocido teorema de Noether, unas de las herramientas más potentes y fundamentales de la física moderna. En términos simples, se puede decir que el teorema de Noether asegura que [79]:

Si un Lagrangiano posee una simetría continua, existe una corriente conservada asociada a esta simetría cuando las ecuaciones de evolución se satisfacen.

En otras palabras, simetrías implican cantidades conservadas. Algunos ejemplos son

Simetría	Cantidad conservada
Rotación	Momento angular total
Paridad	Paridad
Traslación espacial	Momento lineal
Traslación temporal	Energía
Simetría $U(1)$	Carga

Tabla 1: Relación entre simetrías y cantidades conservadas.

Un ejemplo de transformación de coordenadas son las traslaciones espacio-temporales

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu \quad , \quad \delta\phi = \phi' - \phi = \phi(x^\mu + a^\mu) - \phi(x^\mu) \quad , \quad (2.92)$$

expandiendo sobre a^μ , la variación del campo es

$$\delta\phi = \phi(x^\mu) + a^\mu \partial_\mu \phi - \phi(x^\mu) = a^\mu \partial_\mu \phi \quad , \quad (2.93)$$

utilizando las ecuaciones de evolución, la variación del Lagrangiano toma la forma

$$\delta\mathcal{L} = a^\nu \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\nu\phi \right) \quad . \quad (2.94)$$

El Lagrangiano es un escalar, debe transformarse como

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} \quad , \quad \delta\mathcal{L} = a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} \quad , \quad (2.95)$$

utilizando la ecuación anterior y (2.94), se obtiene que

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\nu\phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \right) a^\nu = 0 \quad , \quad \partial_\mu T^\mu_\nu = 0 \quad , \quad (2.96)$$

con T^μ_ν el tensor de energía-momento del campo ϕ

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\nu\phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \quad . \quad (2.97)$$

La carga conservada asociada al tensor de energía-momento es el cuadrimomento y el Hamiltoniano

$$P^\mu = \int T^{0\mu} d^3x \quad , \quad H = \int T^{00} d^3x \quad . \quad (2.98)$$

Con las tres herramientas descritas anteriormente, ecuaciones de evolución, corrientes de Noether y tensor-energía momento, dado un Lagrangiano podemos calcular todas sus propiedades correspondientes y cargas conservadas asociadas a las simetrías del mismo. Hasta ahora, hemos considerado únicamente transformaciones unitarias globales dadas por

$$e^{-i\alpha} \in U(1) : \text{Grupo de transformaciones globales unitarias} \quad , \quad (2.99)$$

con α un parámetro real. Aunque estas transformaciones son útiles para calcular cargas conservadas, no poseen un sentido verdaderamente físico. Una transformación global implica transformar un campo en todos los puntos del espacio-tiempo en un mismo instante, esto viola el principio de casualidad de la relatividad especial. Una transformación más realista sería considerar que el parámetro α es en realidad una función de las coordenadas $\alpha = \alpha(x^\mu)$. Este tipo de transformaciones son llamadas locales o de *gauge* y dan lugar a las interacciones entre campos mediadas por los llamados bosones de *gauge*.

2.5. Simetría de Gauge

De las ecuaciones de Maxwell, podemos transformar los potenciales eléctrico y magnético mediante las derivadas de una función escalar $\lambda(x^\mu)$ y que la física sea invariante. Los potenciales se transformarían como

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda \quad , \quad (2.100)$$

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial\lambda}{\partial x^0} \quad , \quad (2.101)$$

lo cual deja invariante los campos eléctrico y magnético

$$\mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\lambda) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad , \quad (2.102)$$

$$\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}' = -\nabla\Phi' - \frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial x^0} \quad , \quad (2.103)$$

$$= -\nabla\Phi + \frac{\partial}{\partial x^0}(\nabla\lambda) - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial x^0}(\nabla\lambda) = \mathbf{E} \quad . \quad (2.104)$$

Esta propiedad se llama simetría *gauge* y es una reflejo de la conservación de la carga eléctrica. También es posible utilizar esta libertad de elección de los potenciales para imponer restricciones en los potenciales, como

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^0} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad , \quad (2.105)$$

llamada *gauge* de Lorentz.

La invariancia de *gauge* es algo presente desde el electromagnetismo clásico. Si calculamos las ecuaciones de evolución para una partícula de masa m , carga q y velocidad $\mathbf{u}(t)$, que se encuentra en una región del espacio-tiempo permeada por un campo electromagnético descrito por el vector potencial magnético $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ y el potencial eléctrico $\Phi(t, \mathbf{x})$, con un Lagrangiano [80]

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} + q\left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} - \Phi\right) \quad , \quad (2.106)$$

encontraremos que el momento canónico de la partícula $P^j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}$ toma la forma

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + q\mathbf{A} \quad , \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{u} = \mathbf{P} - q\mathbf{A} \quad , \quad (2.107)$$

el momento canónico \mathbf{P} no es el mismo que el momento mecánico (también llamado momento cinético) \mathbf{p} . De hecho, el momento mecánico es invariante de *gauge*, mientras que el momento canónico no lo es, por lo que este último no es físicamente medible. El Hamiltoniano toma la forma

$$H = \sqrt{(\mathbf{P} - q\mathbf{A})^2 + m^2} + q\Phi \quad , \quad (2.108)$$

esto se conoce como receta de “acoplamiento mínimo”. En presencia de un campo electromagnético, el momento mecánico (el que es físicamente medible) se reemplaza por

$$\mathbf{p} \longrightarrow \mathbf{P} - q\mathbf{A} \quad , \quad (2.109)$$

para simplificar la notación, en los siguientes cálculos llamaremos al momento canónico simplemente \mathbf{p} .

Consideremos un campo escalar $\phi(x^\mu)$ cargado en espacio-tiempo libre, la acción está dada por

$$S = \int \left((\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - m^2 |\phi|^2 \right) d^4x \quad , \quad \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2) \quad , \quad (2.110)$$

el campo obedece la ecuación de Klein-Gordon

$$(p_\mu p^\mu - m^2)\phi = 0 \quad . \quad (2.111)$$

Si introducimos un campo electromagnético, entonces el momento $p^\mu \longrightarrow p^\mu - qA^\mu$, o de manera equivalente $i\partial^\mu \longrightarrow i(\partial^\mu + iqA^\mu)$, con $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$. La ecuación de evolución toma la forma

$$(D_\mu D^\mu + m^2)\phi = 0 \quad , \quad (2.112)$$

con $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$, la llamada “derivada covariante”. Al igual que con las ecuaciones de Maxwell nos gustaría preservar la invariancia de *gauge*. El Lagrangiano es ahora

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - m^2 |\phi|^2 \quad , \quad (2.113)$$

si transformamos el campo mediante una transformación unitaria gobal, el Lagrangiano permanece invariante, pero ¿qué sucede bajo una transformación local?,

$$\phi \longrightarrow e^{i\alpha} \phi \quad , \quad \alpha = \alpha(x^\mu) \quad . \quad (2.114)$$

La única forma de preservar la invariancia del Lagrangiano es con el campo A_μ transformándose como

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha(x^\mu) \quad , \quad (2.115)$$

una transformación de *gauge*. Para simetrías globales el Lagrangiano es invariante incluso en el caso libre, una simetría de *gauge* implica automáticamente una simetría global. Las simetrías globales implican corrientes y cargas conservadas de Noether, para este caso la densidad de corriente electromagnética J^μ y la carga eléctrica.

2.6. Electrodinámica cuántica

La electrodinámica cuántica (QED) es la teoría de campo cuántico más sencilla presente en el Modelo Estándar. Describe la interacción entre fermiones con carga eléctrica mediada por un bosón de *gauge*, el fotón. Es producto de la combinación de la teoría clásica del electromagnetismo, la mecánica cuántica y la relatividad especial. QED consiste en acoplar campos fermiónicos ψ con el campo electromagnético A_μ . Al igual que en el acoplamiento de partículas clásicas con el campo electromagnético, esto se logra mediante la derivada covariante D_μ . El Lagrangiano de QED es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \quad , \quad (2.116)$$

con $F_{\mu\nu}$ el tensor antisimétrico de intensidad electromagnética dado por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -\frac{i}{q} [D_\mu, D_\nu] \quad . \quad (2.117)$$

Las componentes de $F_{\mu\nu}$ son los campos eléctricos y magnéticos, el campo cuántico vectorial A_μ representa al fotón, el bosón de *gauge* responsable de mediar las interacciones electromagnéticas resultado de cuantizar la teoría de Maxwell. Aunque a primera vista podría parecer que el campo del fotón tiene cuatro grados de libertad ya que lo escribimos como

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) \quad , \quad (2.118)$$

al fijar un *gauge*, por ejemplo $\partial_\mu A^\mu = 0$, podemos eliminar dos de estos cuatro redundantes grados de libertad. En realidad, solo hay dos grados de libertad físicos para el fotón, las polarizaciones vertical y horizontal de oscilación de los campos eléctrico y magnético.

Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange, se pueden calcular las ecuaciones de evolución para los campos

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = q\bar{\psi}\gamma^\nu\psi : \text{Ecuación de evolución para el fotón} \quad , \quad (2.119)$$

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0 : \text{Ecuación de evolución para fermiones acoplados al fotón} \quad . \quad (2.120)$$

Las ecuaciones en (2.119) no son más que las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas acopladas a la densidad de corriente espinorial $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$.

Mediante las llamadas *reglas de Feynman* podemos construir observables para contrastar la teoría con el experimento. Los términos presentes en el Lagrangiano de QED son

$$\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\text{Maxwell}} + \underbrace{\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi}_{\text{Dirac libre}} - \underbrace{q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi}_{\text{Interacciones}} \quad , \quad (2.121)$$

a cada término del Lagrangiano le corresponde una “regla de Feynman”. En general, en un Lagrangiano de teoría de campo cuántico, el producto de tres o más campos en un término indica una interacción entre los mismos. El último término en (2.121) representa la interacción fundamental de la electrodinámica cuántica, la interacción entre el fotón A_μ , un fermión ψ y el antifermión $\bar{\psi}$ asociado. Este término se puede escribir en términos de la corriente conservada J^μ como

$$-q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi = -qA_\mu J^\mu \quad . \quad (2.122)$$

Nótese que tanto en el caso escalar como fermiónico e incluso en el de espín 1, la interacción del fotón con el campo puede ser escrita de la misma forma. Esta interacción fundamental es representado mediante la abstracción pictórica mostrada en la figura 3.

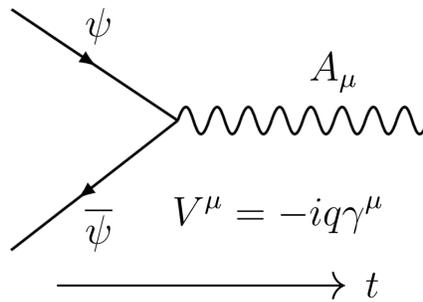


Figura 3: Diagrama de Feynman para la interacción fundamental de QED.

Este tipo de figuras son conocidas como diagramas de Feynman. En general, el coeficiente que acompañe al término de interacción es llamado acoplamiento y su magnitud dicta la intensidad de la interacción. El vértice está dado por i -veces el acoplamiento acompañado de cualquier otra estructura de Lorentz presente en el término de interacción, en este caso el vértice es $V^\mu = -iq\gamma^\mu$ y la carga eléctrica es el acoplamiento q .

El primer diagrama es conocido como canal t y el segundo como canal u . En cada diagrama, el propagador lleva momento cuadrado t y u , respectivamente. Dado un diagrama de Feynman, i -veces la amplitud invariante se construye leyendo el diagrama de derecha a izquierda escribiendo primero los espinores que salen del vértice, es decir los barrados $\bar{u}(p)$ o $\bar{v}(p)$. Después se escribe el vértice y el otro espinor conectado a este vértice. Posteriormente se escribe el propagador y para finalizar las líneas externas y vértices finales correspondientes. Para este proceso la amplitud invariante está dada por

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} = & \bar{v}(p_2) (-ie\gamma^\mu) \varepsilon_\mu^*(k_2) \frac{i(\not{t} + m)}{t - m^2} \varepsilon_\nu^*(k_1) (-ie\gamma^\nu) u(p_1) \\
 & + \bar{v}(p_2) (-ie\gamma^\alpha) \varepsilon_\alpha^*(k_1) \frac{i(\not{u} + m)}{u - m^2} \varepsilon_\beta^*(k_2) (-ie\gamma^\beta) u(p_1) \quad .
 \end{aligned} \tag{2.123}$$

Con la amplitud invariante podemos calcular diferentes observables, por ejemplo la *sección transversal* que se discute a continuación. Los experimentos que nos permiten investigar el comportamiento de partículas subatómicas son principalmente de dispersión. Es decir, se hacen colisionar dos haces de partículas para estudiar las partículas dispersadas tras la colisión mediante detectores sofisticados. La probabilidad de encontrar un estado final particular se puede escribir en términos de la sección transversal diferencial la cual indica la cantidad de partículas dispersadas por ángulo sólido $d\Omega$. Clásicamente (por ejemplo en colisiones de bolas de billar), esta cantidad nos permite estimar el tamaño físico de los cuerpos que colisionan. Por otro lado, en mecánica cuántica, esta cantidad tiene un significado más abstracto. Nos permite estimar la intensidad y naturaleza de la interacción entre las partículas, mientras que clásicamente un par de bolas de billar colisionan o no, cuánticamente existe una cierta probabilidad de que las partículas subatómicas interaccionen con una cierta intensidad. Para procesos de dos cuerpos a dos cuerpos, la sección transversal diferencial en el marco de referencia de centro de masas está dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{CM}^2} \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|} \quad , \tag{2.124}$$

donde E_{CM} es la energía total en el marco de referencia de centro de masas. El módulo cuadrado de la amplitud invariante $|\mathcal{M}|^2$, se suele promediar sobre las polarizaciones de estados iniciales y sumar sobre las polarizaciones de estados finales debido a las características de los experimentos de colisión utilizados para estudiar interacciones fundamentales. Aunque actualmente es tecnológicamente posible hacerlo, en general, las polarizaciones iniciales (previas a la colisión) de los haces de partículas no son controladas y una vez detectadas las partículas sus polarizaciones no son medidas directamente.

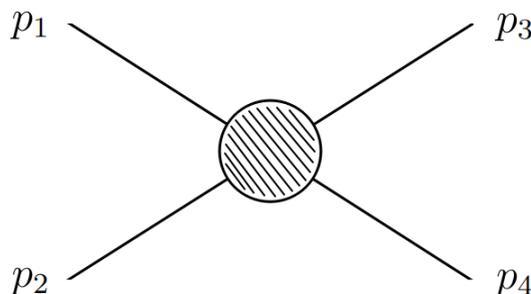


Figura 7: Proceso arbitrario $p_1 p_2 \rightarrow p_3 p_4$.

Para un proceso de dispersión como el que se ilustra en la figura 7, una vez realizado el promedio y suma, $|\mathcal{M}|^2$ se puede escribir en términos de las variables s , t y u conocidas como variables de Mandelstam

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \quad , \quad (2.125)$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2 \quad , \quad (2.126)$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2 \quad , \quad (2.127)$$

además cumplen con la siguiente identidad

$$s + t + u = \sum_j m_j^2 \quad , \quad (2.128)$$

con m_j la masa de cada partícula involucrada en el proceso. Es de particular utilidad escribir los cálculos en términos de estas variables ya que son explícitamente invariantes de Lorentz.

Los cálculos efectuados partiendo de diagramas con la forma mostrada en la figura 6, se conocen como cálculos a nivel árbol. Los canales t y u mostrados en el diagrama no son las únicas posibilidades que se pueden construir con un mismo estado inicial electrón-positrón a un estado final de dos fotones. Podríamos incluir más diagramas de Feynman con *loops*, esto es, tomar en cuenta diagramas que involucren estructuras de la forma mostrada en la figura 8

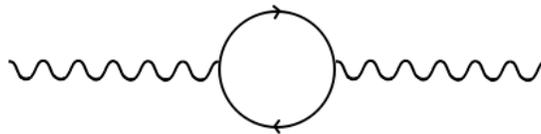


Figura 8: Estructura a un *loop*.

En realidad, hay una cantidad infinita de posibilidades, en general, mientras más *loops* tenga el diagrama de Feynman, más complicado será el cálculo. Afortunadamente QED es una teoría perturbativa, esto quiere decir que, mientras más vértices tenga el diagrama de Feynman, menor será su contribución al proceso, por lo que es una buena aproximación realizar cálculos a un *loop* en QED. Lo anterior se debe a que el vértice de QED es proporcional a la llamada constante adimensional de estructura fina $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$ ¹⁷. De este modo, mientras más vértices tenga un diagrama de QED mayor será el orden de α y por lo tanto el diagrama será de menor contribución. Por otro lado, la Cromodinámica Cuántica (QCD) por ejemplo, es no perturbativa. Esta teoría de campo cuántico describe la interacción entre quarks y gluones, las partículas subatómicas que forman los hadrones como el protón y el neutrón. Para calcular amplitudes de probabilidad de procesos de dispersión en QCD se han desarrollado otras alternativas al acercamiento perturbativo utilizada en QED como lo son las ecuaciones de Schwinger-Dyson y *Lattice* QCD.

En este trabajo se calcula la sección transversal entre materia oscura y núcleo de Xenon a nivel árbol, pues al ser por sí misma una interacción muy débil, no es necesario considerar cálculos a orden de *loop*.

¹⁷En unidades naturales $\hbar c = 1$.

2.7. Electrodinámica cuántica escalar

Esta teoría que describe interacciones entre el fotón y campos escalares cargados eléctricamente, es brevemente discutida ya que no está presente en el Modelo Estándar. Para más en esto ver [81] capítulo 9. Las interacciones están contenidas en el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - m^2|\phi|^2 \quad , \quad (2.129)$$

con $F_{\mu\nu}$ el tensor antisimétrico de intensidad electromagnética (ver ecuación (2.117)). Las interacciones entre el campo ϕ y el fotón A_μ se encuentra en

$$(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) = -qA_\mu J^\mu + q^2\phi\phi^*A_\mu A^\mu \quad . \quad (2.130)$$

En el término acoplado a la corriente tenemos una interacción fundamental entre tres campos, su diagrama se muestra en la figura 9. El término de la derecha se conoce como término de contacto o *seagull* por la forma de su diagrama de Feynman ilustrado en la figura 10.

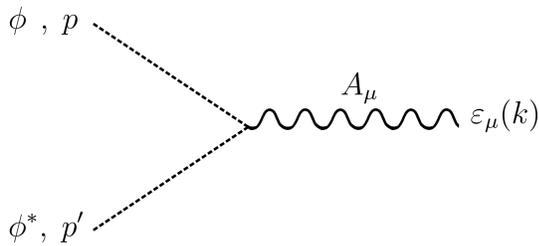


Figura 9: Vértice fundamental entre ϕ , ϕ^* y A_μ .

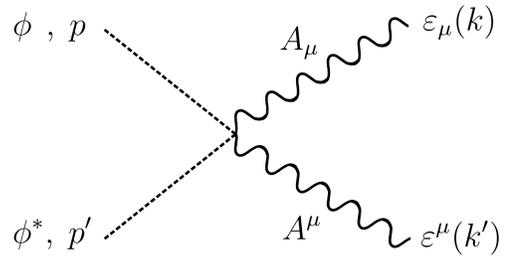


Figura 10: Término de contacto.

El vértice para el término de contacto es simplemente $V^{\mu\nu} = 2iq^2g^{\mu\nu}$, el factor de $2! = 2$ se incluye por razones estadísticas, los fotones son indistinguibles. La métrica se incluye para contraer las polarizaciones $\varepsilon_\alpha(q)$, pues en el término de interacción los fotones están contraídos como $A_\mu A^\mu$. Para el vértice de la interacción entre tres campos, debemos escribir este en términos de funciones de onda en espacio de momentos, esto es

$$-qA_\mu J^\mu = -iq\varepsilon_\mu(k)e^{-ik\cdot x} \left(-ip^\mu e^{ip\cdot x} e^{-ip'\cdot x} + ip'^\mu e^{ip\cdot x} e^{-ip'\cdot x} \right) \quad , \quad (2.131)$$

$$= -q\varepsilon_\mu(k)e^{-i(k+p+p')\cdot x} (p^\mu - p'^\mu) \quad . \quad (2.132)$$

El vértice está formado por los momentos y acoplamientos únicamente

$$V^\mu = -q(p^\mu - p'^\mu) \quad . \quad (2.133)$$

3. El Modelo Estándar

Hasta ahora, se sabe de la existencia de tres familias fundamentales de partículas: Leptones, quarks, y bosones. El comportamiento e interacción entre estas partículas es descrito por el Modelo Estándar de la física de partículas. En este modelo, tres de las cuatro interacciones fundamentales, el electromagnetismo, interacción débil y fuerte, son unificadas en un solo grupo de simetría. Se cree que debe existir un grupo de simetría aun más grande que unifique, incluida la gravedad, todas las interacciones fundamentales en una sola gran interacción. Esta sería la que dominaría el universo milésimas de segundo posteriores al *Big Bang*. Conforme el universo se expandió y enfrió, las interacciones fundamentales se desacoplaron tomando sus propios caminos y adoptando la forma que tienen hoy en día, algo así como una transición de fase. En el Modelo Estándar, las interacciones fuerte y electrodébil se desacoplarían dejando como resultado la interacción fuerte y el electromagnetismo. Este proceso es conocido como “rompimiento espontáneo de la simetría”.

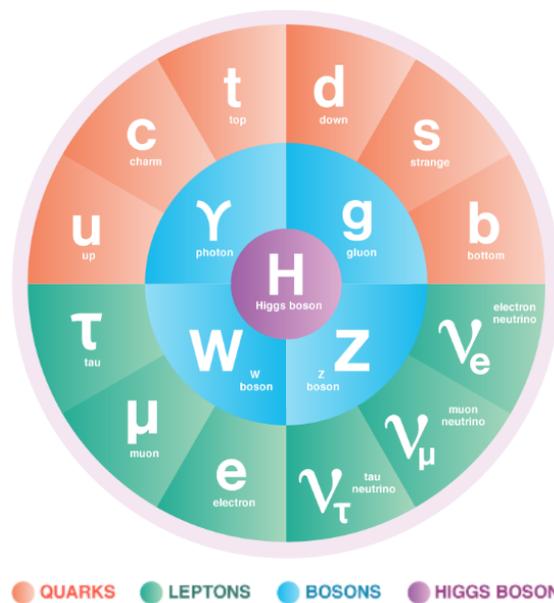


Figura 11: Partículas descritas por el Modelo Estándar. Imagen tomada de [82]. Obra de arte por Estudios Sandbox, Chicago.

El Modelo Estándar es el resultado de casi 100 años de arduo trabajo teórico y experimental. Todo comenzó alrededor de 1920 con la teoría hoyo de Dirac. Después, alrededor de 1950, Feynman, Tomonaga, Schwinger y Dyson desarrollaron la Electrodinámica Cuántica. Posteriormente, entre los 60s y 70s, muchas mentes brillantes (Gell-Mann, Fritsch, Leutwyler, Gross, Wilczek, Cabibbo, Kobayashi, Maskawa entre otros) le dieron forma a la cromodinámica cuántica, la teoría que describe las interacciones entre quarks y gluones. En la misma época, Weinberg, Glashow y Salam, unificaron la interacción débil con el electromagnetismo mediante la teoría propuesta por Higgs, Englert y Brout que introducía el elusivo bosón de Higgs. Muchos otros hicieron también contribuciones para darle forma al Modelo Estándar. Además de otros resultados experimentales presentados por diferentes colaboraciones que confirmaban la existencia de leptones y quarks, el 4 de julio de 2012, la colaboración ATLAS y CMS de

CERN, confirmó la detección del bosón de Higgs, la pieza cuya existencia faltaba por confirmar para establecer la forma final del Modelo Estándar. Para muchos, el Modelo Estándar es la concepción de la mente humana más bella e increíble de la historia. A pesar del increíble éxito de la teoría, como ya se comentó, hemos observado ya una serie de fenómenos que no pueden ser explicados mediante el Modelo Estándar. Con el objetivo de extender este último para intentar resolver el problema de la materia oscura, a continuación se discuten las propiedades fundamentales y estructura del Modelo Estándar.

El Modelo Estándar se escribe en un formalismo Lagrangiano. En general, el Lagrangiano de una teoría de campo cuántico contiene lo siguiente:

- I. Términos de interacción entre campos.
- II. Términos cinéticos para cada campo.
- III. Términos de masa para cada campo masivo.

La forma explícita de cada uno de estos términos depende de la naturaleza del campo, por ejemplo, los términos de masa son diferentes para campos escalares, espinoriales y vectoriales.

3.1. Simetrías espacio-temporales

A continuación se discute brevemente el contexto histórico en el que se descubrió que las llamadas transformaciones de conjugación de carga, paridad e inversión temporal, no son verdaderas simetrías de la naturaleza. Estas transformaciones son buenas simetrías de QED, es decir, la teoría es invariante ante estas transformaciones. Sin embargo, para el Modelo Estándar completo, en general, esto no es verdad. Las propiedades de transformación de campos escalares y vectoriales se encuentran en cualquier libro estándar de teoría de campos cuánticos y Modelo Estándar, por ejemplo, en [81] capítulo 11.

3.1.1. Conjugación de carga

Esta transformación invierte no solo la carga eléctrica de las partículas, sino todo tipo de carga, número leptónico, bariónico, hypercarga, etc. Ya que $C^2 = \mathbb{1}$, sus valores propios son ± 1 ¹⁸. La mayoría de partículas no son estados propios de C , pues si lo fueran, estas serían sus propias antipartículas, como en el caso del fotón. El campo del fotón se transforma como

$$CA_\mu C^{-1} = -A_\mu \quad , \quad (3.1)$$

esto puede parecer un tanto extraño. Recordemos que el fotón se acopla a los campos mediante la carga y C invierte la carga de las partículas, si deseamos preservar la interacción en QED necesitamos compensar este signo menos, esto se logra con la transformación $A_\mu \rightarrow -A_\mu$. En lugar de intentar averiguar como actúa C sobre A_μ , los principios de simetría y conservación dictan las reglas de transformación. La interpretación de C como “cambiar partículas por antipartículas”, no tiene implicaciones físicas, sin embargo, la simetría de una teoría sí que tiene implicaciones físicas. Un ejemplo es el del mesón π^0 con valor propio $+1$ como estado propio de C . La simetría explica por qué el proceso $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ es permitido con valor propio $+1 \rightarrow (-1)(-1)$, pero el proceso $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma + \gamma$ no¹⁹. Esto es una consecuencia del teorema de Furry [83].

¹⁸Esto sucede si la dimensión del operador es dos, si es de dimensión superior, pueden haber otros valores propios.

¹⁹En este contexto γ representa un fotón.

3.1.2. Paridad

Nos gustaría que paridad fuera una buena simetría de la teoría, en general, el Modelo Estándar no es invariante bajo paridad, QED por si misma sí lo es. Para la década de los 50, esta simetría era considerada una simetría fundamental de la naturaleza. En 1956, C.N. Yang y T.D. propusieron [84] la posibilidad de que la interacción débil pudiera violar paridad. Este mismo año la Profesora Chien Shiung Wu lideró un experimento que probó [85] la violación de paridad en decaimiento beta de átomos de Cobalto 60. Los resultados de Wu mostraron que no solo la interacción débil viola paridad por poco, sino que es violada tanto como es físicamente posible. En 1957, el año en que Wu publicó sus resultados, C.N. Yang y T.D. Lee recibieron el premio Nobel de física.

3.1.3. Simetría CP

Posterior a los resultados de Wu, la siguiente simetría que se consideró fundamental era la combinación CP, el proceso de decaimiento beta estudiado por Wu preserva la simetría CP. Sin embargo, en 1964 J.H. Christenson, J.W. Cronin, V.L. Fitch, y R. Turlay mostraron [86] que el decaimiento de mesones K_2^0 a dos piones viola la simetría CP. En 1980 J.W. Cronin y V.L. Fitch recibieron el premio Nobel de física. Esta violación de CP también es conocida como violación débil de CP. Existe otra posibilidad conocida como violación fuerte de CP, hasta el momento no se ha observado.

3.1.4. Inversión temporal

Como un primer intento, si deseamos definir un operador de inversión temporal T , podríamos decir simplemente que bajo esta transformación $t \rightarrow -t$ como es en el caso del grupo $SO^\dagger(1, 3)$, sin embargo, esto no es suficiente. Tomemos la ecuación de Schrödinger para un potencial independiente del tiempo e invertimos el tiempo

$$i\partial_t\psi(t, \mathbf{x}) = H\psi(t, \mathbf{x}) \quad \longrightarrow \quad -i\partial_t\psi(-t, \mathbf{x}) = H\psi(-t, \mathbf{x}) \quad , \quad (3.2)$$

el signo negativo extra podemos absorberlo tomando $H \rightarrow -H$, esto representa un problema ya que si H estaba acotado por abajo, $-H$ no lo estaría y por lo tanto el sistema sería inestable. Esto es similar al problema de energías negativas no acotadas discutido en la sección 2.2.

Entonces, ¿cómo construimos una transformación de inversión temporal adecuada?. Invariancia bajo inversión temporal significa que no es posible distinguir entre un proceso físico que evoluciona hacia adelante en el tiempo de uno que evoluciona hacia atrás. Se suele interpretar a una antipartícula como una partícula viajando hacia atrás en el tiempo, pero hay que ser cuidadoso ya que esta interpretación puede llevar a confusiones al momento de discutir la simetría T . La evolución temporal de una partícula debe ser indistinguible si se observa hacia adelante o hacia atrás en el tiempo, en ambos casos lo que debemos observar es exactamente la misma partícula, no una partícula para el primer caso (hacia adelante en el tiempo) y una antipartícula para el segundo caso (hacia atrás en el tiempo). Este primer intento de inversión temporal en el que simplemente intercambiamos $t \rightarrow -t$ no puede representar una operación de inversión temporal invariante porque sí es posible distinguir entre ir hacia adelante de hacia atrás en el tiempo, pues hace exactamente lo que no buscamos, que hacia atrás en el tiempo en lugar de observar la misma partícula, observemos una antipartícula. En otras palabras, la transformación bajo inversión temporal no debe convertir partículas en antipartículas, al contrario, debe dejar las partículas como partículas y las antipartículas como antipartículas.

Por ejemplo, para lograr invariancia ante inversión temporal en la ecuación de Schrödinger en la que tratamos con funciones de onda, además de efectuar $t \rightarrow -t$, debemos conjugar los campos y conseguir que $i \rightarrow -i$

$$\begin{aligned} i\partial_t\psi(t, \mathbf{x}) = H\psi(t, \mathbf{x}) &\longrightarrow (-i)(-\partial_t\psi^*(-t, \mathbf{x})) = H\psi^*(-t, \mathbf{x}) \\ &= i\partial_t\psi^*(-t, \mathbf{x}) = H\psi^*(-t, \mathbf{x}) \quad . \end{aligned} \quad (3.3)$$

Lo anterior implica que el estado $\psi^*(-t, \mathbf{x})$ es una solución de la ecuación de Schrödinger con la misma energía que $\psi(t, \mathbf{x})$. Entonces, ¿son $\psi(t, \mathbf{x})$ y $\psi^*(-t, \mathbf{x})$ el mismo estado?, la respuesta es no necesariamente [81]. El teorema de Kramer [87, 88] dice que, si se cumple

$$\psi_1 \neq c\psi_2^* \quad , \quad c \in \mathbb{C} \quad , \quad (3.4)$$

entonces estos estados son linealmente independientes, se conocen como dobletes de Kramer. Los estados de energía de un sistema invariante ante inversión temporal son degenerados. Para el caso de un átomo con una cantidad impar de electrones, los estados de energía son n -veces degenerados con n par. Por ejemplo, el átomo de hidrógeno tiene estados de energía $\psi(\mathbf{r})_{n\ell m} = R_n(r)Y_{\ell m}(\theta, \phi)$, el teorema de Kramer predice que los estados m y $-m$ son degenerados, lo cual es cierto. La transformación

$$\psi(t, \mathbf{x}) \longrightarrow \psi^*(-t, \mathbf{x}) \quad , \quad (3.5)$$

convierte partículas en partículas con $\psi(t, \mathbf{x})$ solución de la ecuación de Schrödinger.

Al igual que con las dos simetrías anteriores, se ha observado experimentalmente que la inversión temporal en realidad no es una verdadera simetría de la naturaleza. En 2012, la colaboración BABAR reportó una observación directa de la violación de inversión temporal, es decir, independiente de la observación de violación CP [89]. Esto fue observado en la oscilación de mesones B . Un mesón $B^0(\bar{b}d)$ puede efectuar una transición en un mesón $\bar{B}^0(b\bar{d})$ vía interacción débil, el proceso opuesto también es posible y de hecho, naturalmente este par de mesones oscilan entre el uno y el otro antes de decaer. El tiempo que transcurre en el proceso $B^0 \rightarrow \bar{B}^0$ no es el mismo que para el proceso $\bar{B}^0 \rightarrow B^0$, por lo tanto, es posible diferenciar entre el proceso yendo hacia adelante o atrás en el tiempo.

3.1.5. Simetría CPT

C , P y T no son conservadas independientemente en muchos procesos físicos, pero en principio, si invertimos el espacio-tiempo e intercambiamos partículas por antipartículas, la física debería ser la misma, esto es, la simetría CPT . Hasta el día de hoy, la combinación de las tres simetrías CPT se considera una verdadera simetría de la naturaleza, de no ser así, mucho del trabajo del último siglo tendría que ser reescrito. De hecho, el teorema CPT [90–92] implica que cualquier violación a la simetría CPT también implica una violación en la invariancia de Lorentz. Respecto a la demostración original del teorema en las referencias mencionadas, se consideró que la simetría C es equivalente a la simetría T , pues para ese momento aún se consideraba que P era conservada. Una demostración del teorema más reciente y rigurosa puede encontrarse en [93].

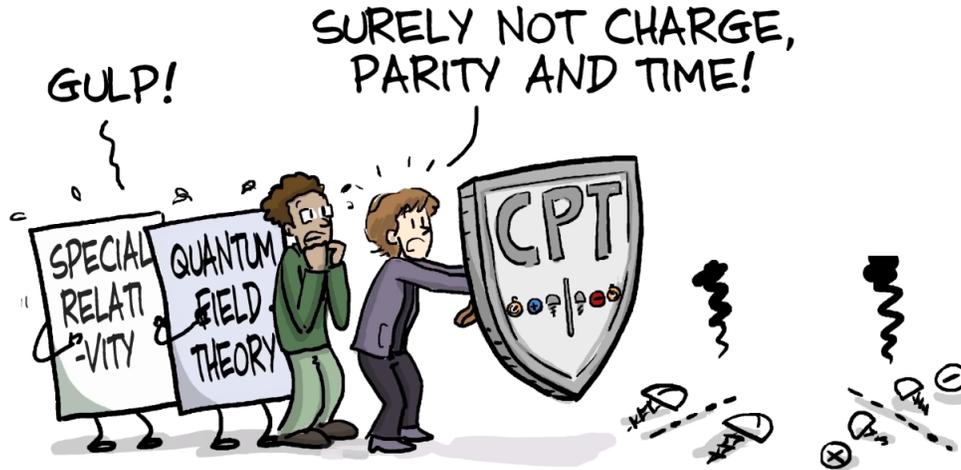


Figura 12: Autoría de PhD Comics de Daniel Whiteson y Jorge Cham [94].

3.2. Simetrías Gauge

Hasta ahora, hemos discutido teorías de *gauge* abelianas como QED, esta última se toma como inspiración para construir las teorías de interacciones electrodébiles y fuertes, de hecho son teorías de *gauge*, pero son de tipo no abelianas²⁰. Para lidiar con este tipo de teorías, consideremos un “multiplete” (escalar o espinorial)

$$\Phi(x^\mu) = \begin{pmatrix} \phi_1(x^\mu) \\ \phi_2(x^\mu) \\ \vdots \\ \phi_n(x^\mu) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

el cual se transforma localmente bajo un elemento $U(x^\mu)$ que pertenecen al grupo no abeliano $SU(n)$ como

$$\Phi(x^\mu) \longrightarrow U(x^\mu)\Phi(x^\mu) \quad , \quad U(x^\mu) = e^{-i\alpha^a T^a} \quad , \quad \alpha^a = \alpha^a(x^\mu) \in \mathbb{R} \quad , \quad (3.7)$$

donde T^a son los generadores del grupo que cumplen con $[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$, hay $n^2 - 1$ generadores. En analogía con QED, la derivada covariante se escribe como

$$D_\mu = \partial_\mu + igV_\mu(x^\mu) \quad , \quad V_\mu = T^a V_\mu^a \quad , \quad (3.8)$$

con un campo vectorial $V_\mu^a(x^\mu)$ por cada generador del grupo T^a , estos campos vectoriales son llamados bosones de *gauge*. Buscamos que la teoría sea invariante de *gauge*, se propone que $D_\mu\Phi$ se transforme como Φ , esto es

²⁰Este tipo de teorías son conocida como de Yang-Mills.

$$D_\mu \Phi \longrightarrow (D_\mu \Phi)' = U(D_\mu \Phi) = (UD_\mu U^\dagger)(U\Phi) \quad , \quad (3.9)$$

el término cinético queda invariante

$$(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) = (D_\mu \Phi)'^\dagger (D^\mu \Phi)' \quad . \quad (3.10)$$

De (3.9) la transformación de la derivada covariante es $D_\mu \longrightarrow UD_\mu U^\dagger$ e implica que los campos de *gauge* se transforman como

$$V'_\mu = UV_\mu U^\dagger + \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^\dagger \quad , \quad (3.11)$$

y para transformaciones cercanas a la identidad

$$V_\mu^{a'} = V_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a - \alpha^a f^{abc} V_\mu^c \quad . \quad (3.12)$$

Utilizando el conmutador de la derivada covariante $V_{\mu\nu} = -\frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu]$, podemos encontrar el tensor de intensidad de campo de *gauge*

$$V_{\mu\nu} = V_{\mu\nu}^a T^a = T^a \left(\partial_\mu V_\nu^a - \partial_\nu V_\mu^a - g f^{abc} V_\mu^b V_\nu^c \right) \quad , \quad (3.13)$$

$$= \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu + ig [V_\mu, V_\nu] \quad . \quad (3.14)$$

En el caso abeliano con grupo de Lie $U(1)$ y $f^{abc} = 0$, recuperamos el resultado de QED

$$V_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu \quad . \quad (3.15)$$

El Lagrangiano del Modelo Estándar es invariante bajo transformaciones *gauge* que pertenecen al grupo de Lie $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$. El subíndice C se refiere a la carga de color, pues $SU(3)$ actúa únicamente sobre campos que tenga carga de color, los quarks y gluones²¹. L indica que $SU(2)$ actúa solo sobre campos de quiralidad izquierda y finalmente Y indica que $U(1)$ actúa sobre campos con un número cuántico llamado hipercarga. Por ejemplo, una transformación *gauge* en el grupo $SU_L(2) \times U_Y(1)$ tiene la forma

$$U(\boldsymbol{\theta}, \eta) = e^{i(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\tau} + \eta Y)/2} \quad , \quad (3.16)$$

²¹La teoría cuántica de *gauge* invariante bajo $SU_C(3)$ es discutida brevemente en la sección 3.5.

con $\theta(x^\mu)$ y $\eta(x^\mu)$ los parámetros de la transformación, Y la hipercarga asociada al grupo $U_Y(1)$ y $\tau^a/2$ los generadores del grupo $SU_L(2)$ siendo τ^a las matrices de Pauli. A diferencia de la derivada covariante utilizada en QED, $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$, que actúa sobre campos individuales, la derivada covariante en el Modelo Estándar para el sector electrodébil

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{ig'}{2} Y B_\mu + \frac{ig}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu \quad , \quad (3.17)$$

es una matriz y actúa sobre dobletes. Las constantes g y g' son los acoplamientos a los campos vectoriales W_μ^a (uno por cada generador $\tau^a/2$.) y B_μ .

3.3. Anomalías

En ocasiones, al tomar una teoría de campo clásico y cuantizarla, algunas simetrías de la acción dejan de ser verdaderas simetrías de la teoría cuántica. Esto sucede debido a ambigüedades que surgen sobre el ordenamiento de ciertos operadores en la teoría cuántica. Un diferente ordenamiento de operadores puede resultar en un diferente Hamiltoniano, por lo tanto en diferentes ecuaciones de evolución. La conservación de cargas de Noether depende de las ecuaciones de evolución, por lo que en la teoría cuántica, simetrías de la acción clásica pueden perderse al cuantizar la teoría. Esta pérdida de simetrías se conoce como “anomalía”. Podríamos decir que existen dos tipos de anomalías, las que provienen de simetrías globales y las que provienen de simetrías de *gauge*. El que una simetría global sea anómala, implica únicamente que en la teoría cuántica pueden ocurrir procesos clásicamente prohibidos, esto es algo ya presente desde la teoría de Schrödinger. Sin embargo, si una simetría de *gauge* no abeliana se pierde al cuantizar la teoría, surgen problemas ya que la simetría de *gauge* es necesaria para demostrar unitaridad y renormalizabilidad²² de la teoría, de manera que es un requerimiento que la teoría esta sea libre de este tipo de anomalías. Sorprendentemente, el Modelo Estándar es libre de anomalías *gauge*, todas se cancelan. Por otro lado, algunas simetrías globales generan anomalías que no se cancelan. Estas simetrías son las relacionadas con la conservación del número leptónico y bariónico. La conservación de estos números cuánticos es una propiedad de la teoría electrodébil con neutrinos no masivos y simetría $SU(2) \times U(1)$, es un accidente en la teoría que hasta ahora, coincide con los experimentos. Las anomalías para el número leptónico L y bariónico B , son las mismas, esto significa que quizá la cantidad $B - L$ es realmente conservada en la naturaleza, incluso en presencia de neutrinos de quiralidad derecha²³. Hasta ahora, la mejor fuente para observar no conservación de número leptónico es a través del doble decaimiento beta sin neutrinos, un proceso de dispersión que, de no conservarse el número leptónico, podría ocurrir. Recientemente, XENON1T reportó [95] no haber encontrado evidencia de este proceso imponiendo un límite sobre la vida media del mismo de $T_{1/2} > 1.92 \times 10^{24}$ años con un nivel de confianza del 90 %.

A diferencia de cuando se formuló la teoría electrodébil, ahora sabemos que los neutrinos son en realidad masivos, por lo que, en principio, la conservación del número leptónico no puede ser una verdadera simetría de la naturaleza. En 2015, T. Kajita [96] líder del observatorio Super-Kamiokande y A.B. McDonald [97] , líder del observatorio de neutrinos de Sudbury, recibieron el premio Nobel de

²²El proceso de renormalización de una teoría va mucho más allá del alcance de este trabajo. En términos simples, que una teoría sea renormalizable significa que las predicciones que haga no sean divergentes. La Ley de Coulomb por ejemplo tiende a infinito en el límite de distancia entre cargas igual a cero, por lo que no es renormalizable. Se dice que una teoría no renormalizable es *efectiva*, es decir, válida solo para una cierta escala de energías. Otro ejemplo es la teoría “cuatro” de Fermi para interacciones débiles, una de las teorías predecesoras del Modelo Estándar.

²³Como se discute en la sección 3.4, el Modelo Estándar contiene neutrinos izquierdos únicamente.

Física por la detección de oscilaciones de neutrinos. La oscilación entre sabores solo puede ocurrir si los neutrinos son masivos. El experimento KATRIN ha reportado recientemente [98] una cota superior sobre la masa efectiva del antineutrino-electrón de $m_\nu < 0.8$ eV a un 90 % de nivel de confianza. Los diferentes estados de sabor²⁴ de neutrinos μ, ν y τ , están acoplados mediante términos de masa, los estados de sabor están mezclados.

Bajo ciertas aproximaciones, una teoría puede presentar simetrías accidentales. Por ejemplo, cuando se trunca la expansión multipolar de un campo eléctrico a primer orden. Para distancias grandes esto puede funcionar, el campo tendría una aparente simetría esférica, sin embargo, al acercarse a la fuente del campo puede ser que esta simetría se pierda ya que se deben incluir más términos de la expansión que no son esféricamente simétricos. De manera similar, una posible explicación del por qué surge la simetría de conservación de número leptónico, es que el Modelo Estándar podría ser una teoría aproximada (actualmente estamos bastante seguros de que en realidad lo es). Como ya se comentó, la simetría de conservación de número leptónico surge de una forma natural, no fue impuesta en la construcción del Modelo Estándar, podría ser que es emergente mas no fundamental. En el Lagrangiano del Modelo Estándar la dimensión más alta que se puede encontrar es cuatro, ningún término contiene más de cuatro campos²⁵, esta restricción está relacionada con el hecho de que la teoría tiene que ser renormalizable, sin embargo, ahora sabemos que el Modelo Estándar es un teoría efectiva, se podrían incluir términos de orden más alto. Algunos modelos más allá del Modelo Estándar proponen operadores de dimensión mayor que cuatro para dar masa a los neutrinos.

3.4. Sector electrodébil y pérdida de una simetría

El Modelo Estándar puede ser estudiado en dos grandes sectores, el sector de interacción fuerte y el de interacción electrodébil,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_C + \mathcal{L}_{EW} \quad , \quad (3.18)$$

en esta sección se discute únicamente la estructura para el sector electrodébil considerando solo una generación leptónica, también llamado mínimo Modelo Estándar. Todos los campos son singletes bajo $SU_C(3)$. Partimos del Lagrangiano

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EW} = & -\frac{1}{2} \text{Tr} (W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\ & + (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \\ & + i \bar{\psi}_L \gamma^\mu D_\mu \psi_L + i \bar{\ell}_R \gamma^\mu D_\mu \ell_R \\ & - G_\ell \left(\bar{\psi}_L \phi \ell_R + \bar{\ell}_R \phi^\dagger \psi_L \right) \quad , \end{aligned} \quad (3.19)$$

²⁴Se entiende por *sabor* los diferentes tipos de neutrinos que conoemos, electrónicos, muónicos y tauónicos. Se utiliza también este término para referirse a los distintos tipos de quarks, *up*, *down*, *charm*, *strange*, *top* y *bottom*.

²⁵Los campos espnoriales tienen dimensiones de $[E]^{3/2}$, los escalares y vectoriales de $[E]$.

donde

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \nu_L^\ell \\ \ell_L \end{pmatrix}, \quad \psi_L = \mathbb{P}_L \psi, \quad \ell_R = \mathbb{P}_R \ell, \quad (3.20)$$

$$\mathbb{P}_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5), \quad \mathbb{P}_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5),$$

con $\mathbb{P}_{R/L}$ los operadores de proyección de quiralidad. El espinor de leptón derecho ℓ_R es un singlete bajo $SU_L(2)$ y ψ_L es un doblete de $SU_L(2)$ que contiene a los espinores izquierdos de Dirac del neutrino de sabor²⁶ ℓ y partícula ℓ . Se asume que el doblete izquierdo se transforma bajo $SU_L(2)$ y bajo $U_Y(1)$, mientras que ℓ_R solo se transforma bajo $U_Y(1)$. También se supone que ψ_L y ℓ_R tienen diferente hipercarga, esto es así porque se sabe que las interacciones débiles violan paridad de forma máxima.

Por decirlo de algún modo, dependiendo sobre qué campo actúe, la derivada covariante toma diferentes formas, diferentes campos tienen diferentes cargas bajo $SU_L(2)$ y $U_Y(1)$. Por ejemplo, al ser ℓ_R un singlete bajo $SU_L(2)$, el término $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu$ no está presente en la derivada covariante que actúa sobre este espinor

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2} Y B_\mu + \frac{ig}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu \right) \phi, \quad (3.21)$$

$$D_\mu \psi_L = \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2} Y_L B_\mu + \frac{ig}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu \right) \psi_L, \quad (3.22)$$

$$D_\mu \ell_R = \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2} Y_R B_\mu \right) \ell_R, \quad (3.23)$$

g y g' son las constantes de acoplamiento. Convencionalmente se toma la hipercarga del doblete escalar como $Y = 1$, las hipercargas Y_L y Y_R serán encontradas más adelante. Los tensores de intensidad $W_{\mu\nu}$ y $B_{\mu\nu}$ están dados por

$$W_{\mu\nu} = -\frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu], \quad (3.24)$$

$$B_{\mu\nu} = -\frac{i}{g'} [D_\mu, D_\nu], \quad (3.25)$$

cada uno relacionado con su respectiva derivada covariante.

En el Lagrangiano no hay términos de masa para el neutrino, se asume no masivo. Tampoco hay término de masa para el campo ℓ que tendría la forma

$$-m\bar{\ell}\ell = -m(\bar{\ell}_R \ell_L + \bar{\ell}_L \ell_R), \quad (3.26)$$

estos no son invariantes de *gauge* por lo que están prohibidos. La elección de la forma del doblete ψ_L genera la masa correcta para los leptones dada por los términos de Yukawa a través del llamado “mecanismo de Higgs”. Los términos de Yukawa son los que involucran al acoplamiento G_ℓ en el Lagrangiano.

²⁶Por “sabor”, nos referiremos a diferentes especies de partícula, electrónica, muónica o tauónica.

Para discutir el rompimiento espontáneo de la simetría es conveniente separar el Lagrangiano como

$$\mathcal{L}_{EW} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_Y \quad , \quad (3.27)$$

donde

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{2} \text{Tr} (W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad , \quad (3.28)$$

$$\mathcal{L}_\phi = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad , \quad (3.29)$$

$$\mathcal{L}_f = i\bar{\psi}_L \gamma^\mu D_\mu \psi_L + i\bar{\ell}_R \gamma^\mu D_\mu \ell_R \quad , \quad (3.30)$$

$$\mathcal{L}_Y = -G_\ell \left(\bar{\psi}_L \phi \ell_R + \bar{\ell}_R \phi^\dagger \psi_L \right) \quad . \quad (3.31)$$

3.4.1. Sector escalar

Comencemos con el sector escalar, la existencia de un campo escalar en el Modelo Estándar fue propuesta por François Englert y Peter Higgs [99–102] de forma independiente con el objetivo de dar masa a los fermiones y bosones mediante el rompimiento espontáneo de la simetría. Posteriormente, Weinberg, Salam y Glashow [103, 104] utilizaron estas ideas y unificaron el electromagnetismo y la interacción débil. Aunque es ya una costumbre utilizar el término de rompimiento espontáneo, en realidad la simetría en cuestión no se rompe, queda más bien oculta. El doblete escalar complejo ϕ en general contiene cuatro campos reales

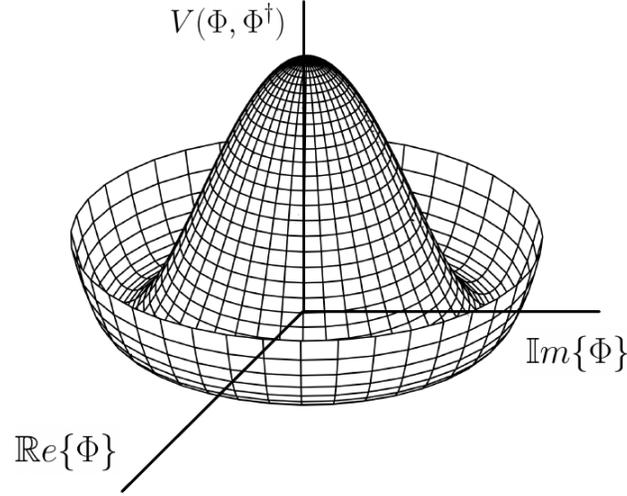
$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^{(1)} \\ \phi^{(2)} \end{pmatrix} \quad , \quad \phi^{(1)} = \phi_1 + i\phi_2 \quad , \quad \phi^{(2)} = \phi_3 + i\phi_4 \quad . \quad (3.32)$$

Para que el potencial $V(\phi, \phi^\dagger)$ dado por

$$V(\phi, \phi^\dagger) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 = \mu^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4 \quad , \quad (3.33)$$

sea acotado por debajo (es decir, no tienda a $-\infty$) la constante λ debe ser positiva, de este modo predomina el término cuártico. Como ya se mencionó $V(\phi, \phi^\dagger)$ depende en realidad de cuatro campos, por lo que visualizarlo mediante una gráfica no es muy sencillo, consideremos un potencial con la misma estructura pero para un campo $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$. Si μ^2 es negativa, el potencial $V(\Phi, \Phi^\dagger)$ toma la forma mostrada en la figura 13. Como se observa, el potencial es simétrico respecto del origen. Cuando se hace teoría de campos cuánticos es necesario partir del valor de mínima energía²⁷ de un campo y posteriormente perturbarlo, si nos posicionamos en algún valor mínimo del potencial, este deja de ser invariante bajo rotaciones alrededor de este punto, esto es lo que se conoce como rompimiento espontáneo de la simetría.

²⁷Este valor también es llamado “valor esperado en el vacío” (*vacuum expectation value*) o simplemente vev.

Figura 13: Potencial de Higgs con $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$.

Encontremos los mínimos del potencial

$$\frac{\partial V}{\partial |\phi|} = 2\mu^2|\phi| + 4\lambda|\phi|^3 = 0 \quad , \quad |\phi|_0^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \quad , \quad (3.34)$$

la solución suele escribirse como

$$|\phi|_0^2 = \frac{v^2}{2} \quad , \quad v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \quad . \quad (3.35)$$

Cualquier punto sobre las circunferencia de mínimos puede funcionar como verdadero vacío, se suele elegir por conveniencia

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad , \quad (3.36)$$

de hecho, no importa que punto elijamos, siempre podemos hacer una transformación de *gauge* y rotar los ejes tal que regresemos a $\langle \phi \rangle$.

El teorema de Goldstone [105, 106] dice que por cada simetría global rota se genera un bosón sin masa conocido como bosón de Goldstone. Una forma más adecuada de citar lo anterior es que, cada generador del grupo de *gauge* que no deja el vacío invariante tiene asociado un bosón de Goldstone. El vacío es invariante bajo un generador G si

$$e^{i\alpha G} \langle \phi \rangle = \langle \phi \rangle \quad , \quad (3.37)$$

considerando una transformación infinitesimal

$$(1 + i\alpha G)\langle\phi\rangle = \langle\phi\rangle \quad , \quad (3.38)$$

$$\langle\phi\rangle = \langle\phi\rangle - i\alpha G\langle\phi\rangle \quad , \quad (3.39)$$

si buscamos que el vacío sea invariante debe ser que $G\langle\phi\rangle = 0$. Calculemos esta condición para $SU_L(2)$,

$$\tau_1\langle\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \quad : \text{ simetría rota } \quad , \quad (3.40)$$

$$\tau_2\langle\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -iv \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \quad : \text{ simetría rota } \quad , \quad (3.41)$$

$$\tau_3\langle\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \quad : \text{ simetría rota } \quad . \quad (3.42)$$

El generador de la simetría $U(1)_Y$ es la hipercarga

$$Y\langle\phi\rangle = \langle\phi\rangle \quad : \text{ simetría rota } \quad . \quad (3.43)$$

Sin embargo, podemos analizar la combinación lineal de $\tau_3 \in SU_L(2)$ y $Y \in U(1)_Y$

$$Q\langle\phi\rangle = \frac{1}{2}(\tau_3 + Y)\langle\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad : \text{ ¡simetría no rota! } \quad , \quad (3.44)$$

este generador se identifica como el asociado a la conservación de la carga eléctrica si es que buscamos identificar la simetría remanente²⁸ con la $U(1)$ del electromagnetismo. Algunos autores definen $I_3 = \tau_3/2$ como la tercera componente del isoespín débil. De la forma del operador Q en (3.44), la componente superior del doblete escalar es la eléctricamente cargada con $I_3^{(1)} = 1/2$, la componente inferior es neutra con $I_3^{(2)} = -1/2$. Se dice que todos los generadores están rotos excepto el de la carga eléctrica. Cuando la simetría es local, cada bosón de Goldstone es absorbido como la componente longitudinal del bosón de *gauge* correspondiente a la simetría rota, proporcionándole masa, esto es conocido como mecanismo de Higgs. El vacío es invariante bajo transformaciones que pertenecen al grupo $U_Q(1)$

$$e^{i\alpha Q}\langle\phi\rangle = \langle\phi\rangle \quad , \quad (3.45)$$

este es precisamente el grupo que queda después del proceso de rompimiento espontáneo de la simetría. Esta invariancia garantiza la existencia de un bosón de *gauge* sin masa asociado al grupo $U_{EM}(1) \equiv U_Q(1)$, el cual es identificado con el fotón.

²⁸La simetría que queda después del proceso del rompimiento espontáneo de la simetría.

Para posicionarnos en la circunferencia de mínimos en el potencial, hagamos una usual parametrización exponencial de números complejos del doblete escalar, en particular es conveniente la siguiente elección

$$\phi(x^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\xi \cdot \tau / 2v} \begin{pmatrix} 0 \\ H(x^\mu) + v \end{pmatrix}, \quad \xi(x^\mu) = (\xi^1(x^\mu), \xi^2(x^\mu), \xi^3(x^\mu)) \quad , \quad (3.46)$$

donde ξ^j Y H son los cuatro campos escalares reales que deben estar presentes en (3.32), de hecho, ξ^j son los bosones de Goldstone. El vev en el argumento de la exponencial se agrega por motivos de dimensionalidad, los campos escalares tiene dimensiones de energía. H describe al bosón de Higgs que es una excitación del campo neutro de Higgs sobre el vacío, es decir, es físico. El grupo bajo el que el Lagrangiano en (3.19) debe ser invariante es $SU(2)_L \times U(1)_Y$, podemos parametrizar los elementos del grupo con un conjunto de $3 + 1$ parámetros que dependan del espacio-tiempo $\theta(x^\mu)$ y $\eta(x^\mu)$. Una transformación del grupo es entonces

$$U(\theta, \eta) = e^{i(\theta \cdot \tau + \eta Y) / 2} \in SU_L(2) \times U_Y(1) \quad , \quad (3.47)$$

tomando los siguientes valores para los parámetros

$$\theta = -\frac{1}{v} \xi \quad , \quad \eta = 0 \quad , \quad (3.48)$$

obtenemos el llamado “*gauge* unitario”. Efectuando la transformación *gauge* sobre el doblete escalar

$$\phi \longrightarrow U(\theta, \eta)\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\xi \cdot \tau / 2v} e^{i\xi \cdot \tau / 2v} \begin{pmatrix} 0 \\ H + v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ H + v \end{pmatrix} \quad , \quad (3.49)$$

los campos escalares $\xi(x^\mu)$ no son físicos, han sido “gaugeados” o “*gauged away*”. Utilicemos (3.49) en el sector puramente escalar

$$\mathcal{L}_\phi = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi, \phi^\dagger) \quad . \quad (3.50)$$

El potencial toma la forma

$$V(\phi, \phi^\dagger) = \frac{\lambda}{4} H^4 + \lambda v H^3 + \lambda v^2 H^2 - \frac{\lambda v^4}{4} \quad , \quad (3.51)$$

aquí encontraremos autointeracciones de Higgs y su término de masa. El Higgs es eléctricamente neutro, por lo que el término de masa va como $(m_H^2/2) H^2$, de este modo identificamos la masa del Higgs

$$m_H^2 = 2\lambda v^2 \quad , \quad \lambda = \frac{m_H^2}{2v^2} \quad . \quad (3.52)$$

Recordando la derivada covariante para $SU(2)_L \times U(1)_Y$

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{ig'}{2} Y B_\mu + \frac{ig}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu \quad , \quad (3.53)$$

con $\mathbf{W}_\mu = (W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3)$, el factor $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu$ toma la forma

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu = \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad . \quad (3.54)$$

Los campos físicos se definen como estados propios de la mayor cantidad posible de observables, en particular de la carga eléctrica, estos estados corresponden a

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \quad , \quad (3.55)$$

estos son los mediadores de la interacción débil. Reescribiendo el término cinético obtenemos

$$(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H + \left[\frac{g^2}{4} W_\mu^- W^{+\mu} + \frac{g^2}{8} W_\mu^3 W^{3\mu} - \frac{gg'}{4} W_\mu^3 B^\mu + \frac{g'^2}{8} B_\mu B^\mu \right] (H + v)^2 \quad , \quad (3.56)$$

identificamos los términos de masa

$$m_W^2 = m_{W^3}^2 = \frac{v^2 g^2}{4} \quad , \quad m_B^2 = \frac{v^2 g'^2}{4} \quad . \quad (3.57)$$

El término con $W_\mu^3 B^\mu$ es un problema, esta mezcla de campos indica que B_μ y W_μ^3 oscilan entre uno y otro a medida que evolucionan en el tiempo, pero no solo eso, esto hace que el Hamiltoniano no sea diagonal. Este término debe de estar relacionado con la masa de algún modo, observemos lo siguiente

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} (B_\mu, W_\mu^3) \mathbf{M} \begin{pmatrix} B^\mu \\ W^{3\mu} \end{pmatrix} = \frac{v^2}{8} (B_\mu, W_\mu^3) \begin{pmatrix} g'^2 & -gg' \\ -gg' & g^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^\mu \\ W^{3\mu} \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

$$= \frac{g^2}{8} W_\mu^3 W^{3\mu} - \frac{gg'}{4} W_\mu^3 B^\mu + \frac{g'^2}{8} B_\mu B^\mu \quad , \quad (3.59)$$

debemos diagonalizar la matriz de masas. Los valores propios corresponden a la energía del estado base, es decir, a la masa de campos físicos. Los valores propios son

$$m_1^2 = 0 \quad , \quad m_2^2 = \frac{v^2}{4}(g^2 + g'^2) \quad . \quad (3.60)$$

La matriz de cambio de base formada por los vectores propios es

$$C = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g & -g' \\ g' & g \end{pmatrix} \quad . \quad (3.61)$$

Esta matriz cumple con $CC^T = \mathbb{1}$ y $\det(C) = 1$, por lo que es un elemento del grupo $SO(2)$. Un elemento de $SO(2)$ se puede parametrizar como

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad , \quad (3.62)$$

por lo tanto, los acoplamientos pueden ser escritos como

$$\cos \theta = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad , \quad \sin \theta = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad , \quad \tan(\theta) = \frac{g'}{g} \quad , \quad (3.63)$$

el parámetro $\theta = \theta_w$ es llamado ángulo de mezcla débil o ángulo de Weinberg. Diagonalizando el Lagrangiano de masas obtenemos

$$\mathbf{M}_D = C^T \mathbf{M} C = \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 \\ 0 & m_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{v^2}{4}(g^2 + g'^2) \end{pmatrix} \quad , \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &= \frac{1}{2} (B_\mu, W_\mu^3) C \mathbf{M}_D C^T \begin{pmatrix} B^\mu \\ W^{3\mu} \end{pmatrix} \\ &= \frac{m_1^2}{2} (\cos \theta_w B_\mu + \sin \theta_w W_\mu^3)^2 + \frac{m_2^2}{2} (\cos \theta_w W_\mu^3 - \sin \theta_w B_\mu)^2 \quad . \end{aligned} \quad (3.65)$$

Se identifican los campos físicos que surgen del rompimiento espontáneo de la simetría, el fotón A_μ y el bosón Z_μ

$$A_\mu = \cos \theta_w B_\mu + \sin \theta_w W_\mu^3 \quad , \quad m_A^2 = 0 \quad , \quad (3.66)$$

$$Z_\mu = \cos \theta_w W_\mu^3 - \sin \theta_w B_\mu \quad , \quad m_Z^2 = \frac{v^2}{4}(g^2 + g'^2) \quad , \quad (3.67)$$

$$\mathcal{L}_m = \frac{m_Z^2}{2} Z_\mu Z^\mu \quad . \quad (3.68)$$

Para escribir el Lagrangiano en la base de masas, es decir, en términos de los campos físicos, necesitamos

$$B_\mu = \cos \theta_w A_\mu - \sin \theta_w Z_\mu \quad , \quad W_\mu^3 = \sin \theta_w A_\mu + \cos \theta_w Z_\mu \quad , \quad (3.69)$$

el sector escalar del Lagrangiano toma la forma

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H - \frac{m_H^2}{2} H^2 - \frac{m_H^2}{2v} H^3 - \frac{m_H^2}{8v^2} H^4 + \frac{v^2 m_H^2}{8} \quad (3.70)$$

$$+ \left[\frac{m_Z^2}{2v^2} Z_\mu Z^\mu + \frac{m_W^2}{v^2} W_\mu^- W^{+\mu} \right] (H + v)^2 \quad . \quad (3.71)$$

3.4.2. Sector fermiónico

Continuemos con el sector fermiónico. En este sector se encuentran los términos de evolución para leptones y neutrinos así como interacciones mediadas por Z_μ y A_μ . El Lagrangiano es

$$\mathcal{L}_f = i \bar{\psi}_L \gamma^\mu D_\mu \psi_L + i \bar{\ell}_R \gamma^\mu D_\mu \ell_R \quad , \quad (3.72)$$

el objetivo es escribir esto en la base física, es decir en términos de los campos Z_μ y A_μ . Después de un poco de trabajo, utilizando los operadores de proyección, obtenemos la expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f = & \frac{i}{2} \bar{\nu}^\ell \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \left\{ \partial_\mu + \frac{i}{2} A_\mu [g' Y_L \cos \theta_w + g \sin \theta_w] + \frac{i}{2} Z_\mu [g \cos \theta_w - g' Y_L \sin \theta_w] \right\} \nu^\ell \\ & + \frac{i}{2} \bar{\ell} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \left\{ \partial_\mu + \frac{i}{2} A_\mu [g' Y_L \cos \theta_w - g \sin \theta_w] - \frac{i}{2} Z_\mu [g \cos \theta_w + g' Y_L \sin \theta_w] \right\} \ell \\ & + \frac{i}{2} \bar{\ell} \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \left\{ \partial_\mu + \frac{i}{2} g' Y_R \cos \theta_w A_\mu - \frac{i}{2} g' Y_R \cos \theta_w Z_\mu \right\} \ell \\ & - \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\nu}^\ell \gamma^\mu (1 - \gamma^5) W_\mu^+ \ell - \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\ell} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) W_\mu^- \nu^\ell \quad , \quad (3.73) \end{aligned}$$

debemos imponer las siguientes restricciones:

- I. El neutrino no tiene carga, el acoplamiento con el fotón debe anularse,

$$\frac{i}{2} (g' Y_L \cos \theta_w + g \sin \theta_w) = 0 \quad .$$

- II. El término con $e\gamma^5 A_\mu$ viola paridad, ya que QED no viola paridad este acoplamiento debe anularse,

$$\frac{1}{4} (g' Y_L \cos \theta_w - g \sin \theta_w) - \frac{g'}{4} Y_R \cos \theta_w = 0 \quad .$$

III. El acoplamiento con el fotón es la carga eléctrica,

$$-\frac{1}{4}\left(g'Y_L \cos \theta_w - g \sin \theta_w\right) - \frac{g'}{4} Y_R \cos \theta_w = q \quad .$$

Con estas restricciones encontramos que

$$g = \frac{q}{\sin \theta_w} \quad , \quad g' = \frac{q}{\cos \theta_w} \quad , \quad Y_L = -1 \quad , \quad Y_R = -2 \quad . \quad (3.74)$$

Trabajando el álgebra se obtiene la expresión final

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f &= \frac{i}{2} \bar{\nu}^\ell \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \partial_\mu \nu + i \bar{\ell} \gamma^\mu \partial_\mu \ell - q \bar{\ell} \gamma^\mu A_\mu \ell \\ &\quad - \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\nu}^\ell \gamma^\mu (1 - \gamma^5) W_\mu^+ \ell - \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\ell} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) W_\mu^- \nu^\ell \\ &\quad - \frac{m_Z}{2v} \bar{\nu}^\ell \gamma^\mu (1 - \gamma^5) Z_\mu \nu + \frac{m_Z}{v} \bar{\ell} \gamma^\mu \left[\frac{1}{2} (1 - \gamma^5) - 2 \sin^2 \theta_w \right] \ell Z_\mu \quad . \end{aligned}$$

Utilizando los operadores de proyección, podemos escribir los términos de interacción con neutrinos como

$$\frac{i}{2} \bar{\nu}^\ell \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \partial_\mu \nu = i \bar{\nu}_L \gamma^\mu \partial_\mu \nu_L \quad . \quad (3.75)$$

3.4.3. Sector de Yukawa

En este sector encontramos los términos de masa para los leptones e interacción con el Higgs, el Lagrangiano es

$$\mathcal{L}_Y = -G_\ell \left(\bar{\psi}_L \phi \ell_R + \bar{\ell}_R \phi^\dagger \psi_L \right) \quad . \quad (3.76)$$

Después de un cálculo sencillo, el Lagrangiano toma la forma

$$\mathcal{L}_Y = -\frac{G_\ell}{\sqrt{2}} \bar{\ell} \ell H - \frac{v G_\ell}{\sqrt{2}} \bar{\ell} \ell \quad , \quad (3.77)$$

se identifica la masa del leptón como $m_\ell = \frac{v G_\ell}{\sqrt{2}}$. Como ya se ha comentado, no se generaron términos de masa para los neutrinos.

3.4.4. Sector bosónico

En este sector se encuentran interacciones entre los bosones de *gauge* A_μ , Z_μ y W_μ^\pm así como sus correspondientes términos cinéticos. Debemos recuperar el término cinético para el fotón A_μ presente en QED mediante $F_{\mu\nu}$. Comencemos con el término

$$-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)(\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu) \quad , \quad (3.78)$$

escribiendo lo anterior en término de los campos físicos $B_\mu = \cos\theta_w A_\mu - \sin\theta_w Z_\mu$ obtenemos que

$$-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\cos^2\theta_w A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\cos\theta_w \sin\theta_w A_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\sin^2\theta_w \tilde{Z}_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} \quad . \quad (3.79)$$

donde $\tilde{Z}_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$ es un tensor de intensidad para el caso libre, es decir sin interacciones. De la parte no abeliana, el tensor de intensidad

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu + ig[V_\mu, V_\nu] \quad , \quad V_\mu = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu \quad , \quad (3.80)$$

toma la forma

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{W}_{\mu\nu}^3 + ig(W_\mu^+ W_\nu^- - W_\nu^+ W_\mu^-) & \sqrt{2}[\tilde{W}_{\mu\nu}^+ + ig(W_\mu^3 W_\nu^+ - W_\nu^3 W_\mu^+)] \\ \sqrt{2}[\tilde{W}_{\mu\nu}^- - ig(W_\mu^3 W_\nu^- - W_\nu^3 W_\mu^-)] & -\tilde{W}_{\mu\nu}^3 - ig(W_\mu^+ W_\nu^- - W_\nu^+ W_\mu^-) \end{pmatrix} \quad , \quad (3.81)$$

donde

$$\tilde{W}_{\mu\nu}^\pm = \partial_\mu W_\nu^\pm - \partial_\nu W_\mu^\pm \quad , \quad (3.82)$$

$$\tilde{W}_{\mu\nu}^3 = \partial_\mu W_\nu^3 - \partial_\nu W_\mu^3 \quad , \quad (3.83)$$

son tensores de intensidad en el caso libre. Ahora debemos escribir los términos cinéticos

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{2}\text{Tr}(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}) - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \quad , \quad (3.84)$$

en términos de los campos físicos A_μ y Z_μ . El cálculo es algo tedioso, utilizando los resultados anteriores se puede verificar que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_G = & -\frac{1}{2}\widetilde{W}_{\mu\nu}^+\widetilde{W}^{-\mu\nu} - \frac{1}{4}A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\widetilde{Z}_{\mu\nu}\widetilde{Z}^{\mu\nu} \\
& - \frac{ig}{2}\cos\theta_w\widetilde{Z}^{\mu\nu}\left(W_\mu^+W_\nu^- - W_\nu^+W_\mu^-\right) + \frac{ig}{2}\sin\theta_w A^{\mu\nu}\left(W_\mu^+W_\nu^- - W_\nu^+W_\mu^-\right) \\
& - \frac{ig}{2}\cos\theta_w\widetilde{W}_{\mu\nu}^+\left(Z^\nu W^{-\mu} - Z^\mu W^{-\nu}\right) + \frac{ig}{2}\sin\theta_w\widetilde{W}_{\mu\nu}^+\left(A^\nu W^{-\mu} - A^\mu W^{-\nu}\right) \\
& - \frac{ig}{2}\cos\theta_w\widetilde{W}_{\mu\nu}^-\left(Z^\mu W^{+\nu} - Z^\nu W^{+\mu}\right) + \frac{ig}{2}\sin\theta_w\widetilde{W}_{\mu\nu}^-\left(A^\mu W^{+\nu} - A^\nu W^{+\mu}\right) \\
& + g^2\cos^2\theta_w Z_\mu Z^\nu W_\nu^+ W^{-\mu} - g^2\cos\theta_w\sin\theta_w Z_\mu A^\nu W_\nu^+ W^{-\mu} \\
& + g^2\sin^2\theta_w A_\mu A^\nu W_\nu^+ W^{-\mu} - g^2\cos\theta_w\sin\theta_w A_\mu Z^\nu W_\nu^+ W^{-\mu} \\
& - g^2W_\mu^+ W^{-\mu}\left(\cos^2\theta_w Z_\nu Z^\nu - 2\cos\theta_w\sin\theta_w A_\nu Z^\nu + \sin^2\theta_w A_\nu A^\nu\right) \\
& + \frac{g^2}{4}\left(W_\mu^+ W_\nu^- - W_\nu^+ W_\mu^-\right)^2, \tag{3.85}
\end{aligned}$$

el segundo término corresponde al término cinético para el fotón presente en QED escrito en la ecuación (2.117). Con esto, hemos completado el proceso de rompimiento espontáneo de la simetría en el sector electrodébil del mínimo Modelo Estándar. Para las tres generaciones de leptones el Lagrangiano es prácticamente idéntico, el Lagrangiano total es la suma de los tres.

3.5. Cromodinámica Cuántica

Para concluir este capítulo, discutimos brevemente el segundo gran sector del Modelo Estándar, la teoría que describe las interacciones fuertes, la Cromodinámica Cuántica, QCD. Para más en esto ver [81] capítulo 25, 26 y 32. Se puede estudiar más de esta teoría también en [107] capítulo 17. Como ya se mencionó, esta teoría describe las interacciones de seis sabores de quarks que están cargados bajo el grupo $SU_C(3)$. Este tipo de carga es llamada de color y las interacciones son mediadas por los gluones, bosones de *gauge*. El nombre “color” no tienen nada que ver con los colores ópticos, es una analogía ya que la “suma” de los tres colores primarios de la luz resulta en el color neutro, blanco. Del mismo modo, las tres posibles cargas de $SU_C(3)$, roja, verde y azul, suman cero. Hay 8 gluones, todos no masivos. El Lagrangiano de QCD es

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \frac{\theta g_s^2}{32\pi^2}\widetilde{G}_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \sum_{r=1}^6\bar{\psi}_r(i\gamma^\mu D_\mu - m_r)\psi_r, \tag{3.86}$$

donde ψ_r se transforman bajo la representación fundamental de $SU_C(3)$, es decir, es un triplete

$$\psi_r = \begin{pmatrix} \psi_r^1 \\ \psi_r^2 \\ \psi_r^3 \end{pmatrix}, \tag{3.87}$$

ψ_r^c son espinores de Dirac para los quarks de sabor $r = u, d, c, s, t, b$ (*up, down, charm, strange, top, bottom*) y con el superíndice $c = 1, 2, 3$, denotando las cargas de color roja, verde y azul, respectivamente. El tensor de intensidad que contiene a los campos G_a^μ de los gluones es

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu - g_s f_{abc} G_a^\mu G_b^\nu \quad , \quad \tilde{G}_a^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} G_{a\alpha\beta} \quad . \quad (3.88)$$

Considerando únicamente QCD, la derivada covariante para los quarks es

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{ig_s}{2} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{G}_\mu \quad , \quad (3.89)$$

con $\lambda^a/2$ los generadores del grupo $SU(3)$ y λ^a las matrices de Gell-Mann.

En el contexto del Modelo Estándar completo, al igual que con los leptones y neutrinos, los quarks se agrupan en tres familias. Para cada familia hay un doblete izquierdo bajo $SU_L(2)$ Q_{Li} , que contiene los tripletes bajo $SU_C(3)$ de tipo *up* y *down*. Para las partes derechas, hay dos singletes bajo $SU_L(2)$, pero tripletes bajo $SU_C(3)$, u_{Ri} y d_{Ri}

$$Q_{Li} = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}_i \quad , \quad u_{Ri} \quad , \quad d_{Ri} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad : \text{familias o generaciones} \quad , \quad (3.90)$$

la primera familia contiene los sabores $u_{R1} = u$ y $d_{R1} = d$, la segunda $u_{R2} = c$ y $d_{R2} = s$, la tercera $u_{R3} = t$ y $d_{R3} = b$. Los términos de evolución, interacción con el fotón, Z y W^\pm están contenidos en

$$\mathcal{L}_{qf} = i \bar{Q}_{Li} \gamma^\mu D_\mu Q_{Li} + i \bar{u}_{Ri} \gamma^\mu D_\mu u_{Ri} + i \bar{d}_{Ri} \gamma^\mu D_\mu d_{Ri} \quad , \quad (3.91)$$

con la derivada covariante actuando de la forma que corresponde según sea sobre dobletes o singletes. Las masas generadas por el mecanismo de Higgs están contenidas en

$$\mathcal{L}_{qY} = -G_{ij}^u \bar{Q}_{Li} H u_{Rj} - G_{ij}^d \bar{Q}_{Li} H d_{Rj} \quad , \quad (3.92)$$

en el Modelo Estándar completo, considerando todas las familias de leptones y quarks, los acoplamientos de Yukawa G_{ij}^k forman una matriz de masa para cada generación k

$$M_{ij}^k = \frac{v}{\sqrt{2}} G_{ij}^k \quad , \quad (3.93)$$

para los quarks, estas matrices no son diagonales. Para poder escribir el Lagrangiano en términos de los campos físicos, debemos diagonalizar las matrices de masa.

El término en el Lagrangiano

$$\frac{\theta g_s^2}{32\pi^2} \tilde{G}_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \quad , \quad (3.94)$$

induce la llamada violación fuerte de CP, un problema en el Modelo Estándar aún sin resolver. Como ya se comentó en la Introducción de este documento, este problema podría resolverse mediante una nueva simetría global $U(1)$ llamada de Peccei-Quinn que da lugar al axi3n. El estudio de las interacciones fuertes en la teor3a de quarks y gluones es ampliamente extenso y mucho m3s complicado que para las interacciones electrodébiles. En este trabajo no se discute el proceso de rompimiento espont3neo de la simetr3a para quarks ya que en la propuesta de materia oscura presentada no se necesitan de interacciones fuertes para realizar los c3lculos.

4. Materia oscura tensorial

En trabajos recientes [59, 60, 108], se propuso que la materia oscura podría ser una partícula descrita por campos que se transforman bajo la representación $(\mathbf{1}, \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{0}, \mathbf{1})$. En esta serie de trabajos se exploró esta posibilidad considerando términos efectivos de interacciones con materia oscura mediadas por portal²⁹ de Higgs, fotón y bosón Z . Se exploraron sus implicación para tres observables, densidad reliquia, exceso de fotones del centro de la galaxia y detección directa. Los observables pueden ser explicados por el portal de Higgs solo si la masa de la materia oscura es alrededor de la mitad de la masa del Higgs. Esta es una coincidencia que surge algo fundamental, quizá una nueva simetría está detrás de esto, también podría ser que la masa de la materia oscura este relacionada con el mecanismo de Higgs. En este trabajo se propone que dicha simetría es $SU(2)$, la materia oscura será la componente neutra de un doblete bajo $SU_L(2)$, una especie de neutrino pero en la representación del grupo de Lorentz mencionada. La otra componente del doblete sería cargada, y como no es observada en el universo actual debió haber decaído ya.

En este capítulo se muestra el proceso de rompimiento espontáneo de simetría para el Lagrangiano de la teoría propuesta en este trabajo.

4.1. Rompimiento espontáneo de la simetría

Como ya se ha comentado, se propone que la materia oscura sea una partícula de espín uno cuyo campo se transforme bajo la representación $(\mathbf{1}, \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ del grupo de Lorentz. El doblete de $SU_L(2)$ propuesto es

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi^+ \\ \Psi^0 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

donde Ψ^0 representa la materia oscura que posee hipercarga únicamente y Ψ^+ un compañero con hipercarga y carga eléctrica. Recordemos que el compañero cargado Ψ^+ no es observado en la actualidad, por lo que su densidad debe haber disminuido abruptamente en una etapa temprana del universo. Para que esto pueda suceder, al poseer carga eléctrica e hipercarga, Ψ^+ debe decaer en su totalidad a partículas del Modelo Estándar y/o incluso a la propia materia oscura. Esto solo es posible si tiene una masa mayor a la suma de las masas de la materia oscura y la del W^\pm , como veremos más adelante.

Se propone también que antes del rompimiento espontáneo de la simetría la materia oscura y Ψ^+ tendrían una masa “primigenia” μ^2 , que podría estar relacionada al rompimiento de alguna otra simetría. El Lagrangiano de la teoría es

$$\mathcal{L} = (\overline{D_\mu \Psi}) \Sigma^{\mu\nu} (D_\nu \Psi) + g_1 (\overline{\Psi} \phi) (\phi^\dagger \Psi) - g_2 (\overline{\Psi} \Psi) (\phi^\dagger \phi) - \mu^2 \overline{\Psi} \Psi, \quad (4.2)$$

²⁹Se entiende por portal aquel término de interacción que permita conectar el sector de materia oscura con el Modelo Estándar.

con g_1 y g_2 los acoplamientos de Yukawa y la derivada covariante actuando sobre Ψ como

$$D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + \frac{i}{2} \left(Y_s G' B_\mu + G \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu \right) \Psi \quad , \quad \overline{D}_\mu \overline{\Psi} = \partial_\mu \overline{\Psi} - \frac{i}{2} \overline{\Psi} \left(Y_s G' B_\mu + G \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu \right) \quad , \quad (4.3)$$

los acoplamientos G , G' y la hipercarga Y_s serán determinados más adelante. Los términos de masa e interacciones con el Higgs están contenidos en el siguiente Lagrangiano

$$\mathcal{L}_m = g_1 \left(\overline{\Psi} \phi \right) \left(\phi^\dagger \Psi \right) - g_2 \left(\overline{\Psi} \Psi \right) \left(\phi^\dagger \phi \right) - \mu^2 \overline{\Psi} \Psi \quad . \quad (4.4)$$

En estos términos se encuentra un primer portal de interacción con el Modelo Estándar, es comúnmente llamado portal de Higgs y está presente en la mayoría de modelos de materia oscura de espín entero, incluidos trabajos recientes en singletes de materia oscura tensorial [59]. Un segundo portal al Modelo Estándar es mediado por el bosón Z , estos términos de interacción están presentes en

$$\mathcal{L}_{int} = \left(\overline{D}_\mu \overline{\Psi} \right) \Sigma^{\mu\nu} \left(D_\nu \Psi \right) \quad . \quad (4.5)$$

Aquí también encontramos un portal mediado por un par de bosones W_μ^\pm a nivel de *loop*. Recordemos que el objetivo es calcular la sección transversal de interacción entre materia oscura y núcleo de Xenon, este último portal mediado por W_μ^\pm no contribuye en la interacción efectiva con el núcleo a nivel árbol.

4.1.1. Sector de interacciones

Trabajemos ahora el rompimiento de simetría en los términos de interacción, para identificar las interacciones correctamente debemos recordar la corriente conservada para un campo de Klein Gordon complejo ϕ , pues la estructura de las corrientes de interacción para los campos en Ψ es similar

$$J_{KG}^\mu = i \left(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^* \right) \quad . \quad (4.6)$$

El Lagrangiano de interacción es

$$\mathcal{L}_{int} = \left(\overline{D}_\mu \overline{\Psi} \right) \Sigma^{\mu\nu} \left(D_\nu \Psi \right) \quad (4.7)$$

$$= \left(\partial_\mu \overline{\Psi} - \frac{i}{2} \overline{\Psi} \left(Y_s G' B_\mu + G \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu \right) \right) \Sigma^{\mu\nu} \left(\partial_\nu \Psi + \frac{i}{2} \left(Y_s G' B_\nu + G \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\nu \right) \Psi \right) \quad , \quad (4.8)$$

es conveniente trabajar los términos por partes, definamos lo siguiente

$$D_\nu = \begin{pmatrix} \alpha_\nu \\ \beta_\nu \end{pmatrix} \quad , \quad \overline{D}_\mu \overline{\Psi} = \left(\bar{\alpha}_\mu , \bar{\beta}_\mu \right) \quad , \quad (4.9)$$

de este modo escribimos el sector de interacciones como

$$\mathcal{L}_{int} = \bar{\alpha}_\mu \Sigma^{\mu\nu} \alpha_\nu + \bar{\beta}_\mu \Sigma^{\mu\nu} \beta_\nu \quad , \quad (4.10)$$

donde α_ν y β_ν están dados por

$$\alpha_\nu = \partial_\nu \Psi^+ + \frac{i}{2} \left[A_\nu (Y_s G' \cos \theta_w + G \sin \theta_w) + Z_\nu (G \cos \theta_w - Y_s G' \sin \theta_w) \right] \Psi^+ + \frac{iG}{\sqrt{2}} W_\nu^+ \Psi^0 \quad , \quad (4.11)$$

$$\beta_\nu = \partial_\nu \Psi^0 + \frac{i}{2} \left[A_\nu (Y_s G' \cos \theta_w - G \sin \theta_w) - Z_\nu (G \cos \theta_w + Y_s G' \sin \theta_w) \right] \Psi^0 - \frac{iG}{\sqrt{2}} W_\nu^- \Psi^+ \quad . \quad (4.12)$$

Los términos de interacción entre materia oscura con fotón y bosón Z , están contenidos en $\bar{\beta}_\mu \Sigma^{\mu\nu} \beta_\nu$ y tienen la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & \frac{i}{2} A_\nu (Y_s G' \cos \theta_w - G \sin \theta_w) \left[\partial_\mu \bar{\Psi}^0 \Sigma^{\mu\nu} \Psi^0 - \bar{\Psi}^0 \Sigma^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi^0 \right] \\ & - \frac{i}{2} Z_\nu (G \cos \theta_w + Y_s G' \sin \theta_w) \left[\partial_\mu \bar{\Psi}^0 \Sigma^{\mu\nu} \Psi^0 - \bar{\Psi}^0 \Sigma^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi^0 \right] \quad , \end{aligned} \quad (4.13)$$

el primer término va como $-q_0 A_\mu J^\mu$ (ver ecuaciones (2.91) y (2.122)), al asumir que Ψ^0 es neutro

$$\frac{1}{2} (Y_s G' \cos \theta_w - G \sin \theta_w) = 0 \quad , \quad \tan \theta_w = \frac{Y_s G'}{G} = \frac{g'}{g} \quad . \quad (4.14)$$

Hagamos lo mismo ahora para el compañero cargado, en este caso la corriente se acopla mediante la carga eléctrica, los términos de interacción del fotón y el Z con Ψ^+ , se encuentran $\bar{\alpha}_\mu \Sigma^{\mu\nu} \alpha_\nu$ y tienen la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+ = & \frac{i}{2} A_\nu (Y_s G' \cos \theta_w + G \sin \theta_w) \left[\partial_\mu \bar{\Psi}^+ \Sigma^{\mu\nu} \Psi^+ - \bar{\Psi}^+ \Sigma^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi^+ \right] \\ & + \frac{i}{2} Z_\nu (G \cos \theta_w - Y_s G' \sin \theta_w) \left[\partial_\mu \bar{\Psi}^+ \Sigma^{\mu\nu} \Psi^+ - \bar{\Psi}^+ \Sigma^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi^+ \right] \quad , \end{aligned} \quad (4.15)$$

el acoplamiento con el fotón es fijado como la carga eléctrica

$$\frac{1}{2} (Y_s G' \cos \theta_w + G \sin \theta_w) = e \quad , \quad (4.16)$$

utilizando (4.14) se obtiene la siguiente relación con los acoplamientos del Modelo Estándar,

$$G = \frac{e}{\sin \theta_w} = g \quad , \quad Y_s G' = \frac{e}{Y_s \cos \theta_w} = g' \quad . \quad (4.17)$$

Trabajando el álgebra para calcular el acoplamiento con el bosón Z se obtiene que

$$\frac{1}{2}(G \cos \theta_w + Y_s G' \sin \theta_w) = \frac{G}{2 \cos \theta_w} = \frac{e}{\sin 2\theta_w} = \frac{m_z}{v} \quad , \quad (4.18)$$

$$\frac{1}{2}(G \cos \theta_w - Y_s G' \sin \theta_w) = \frac{\beta e}{\sin 2\theta_w} = \frac{\beta m_z}{v} \quad , \quad \beta = 1 - 2 \sin^2 \theta_w \quad . \quad (4.19)$$

Con las restricciones anteriores, los términos de interacción se reducen a

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{m_z}{v} Z_\mu J_0^\mu \quad , \quad \mathcal{L}_+ = e A_\mu J_+^\mu + \frac{\beta m_z}{v} Z_\mu J_+^\mu \quad , \quad (4.20)$$

donde se han definido las corrientes oscuras neutra y cargada como

$$J_0^\mu = i \left(\partial_\mu \bar{\Psi}^0 \sum^{\mu\nu} \Psi^0 - \bar{\Psi}^0 \sum^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi^0 \right) \quad , \quad (4.21)$$

$$J_+^\mu = i \left(\partial_\mu \bar{\Psi}^+ \sum^{\mu\nu} \Psi^+ - \bar{\Psi}^+ \sum^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi^+ \right) \quad . \quad (4.22)$$

Finalmente, el Lagrangiano de interacción toma la forma

$$\begin{aligned} (\overline{D_\mu \Psi}) \sum^{\mu\nu} (D_\nu \Psi) &= \partial_\mu \bar{\Psi}^+ \sum^{\mu\nu} \partial_\nu \Psi^+ + \partial_\mu \bar{\Psi}^0 \sum^{\mu\nu} \partial_\nu \Psi^0 \\ &+ ie A_\mu \left[\partial_\mu \bar{\Psi}^+ \sum^{\mu\nu} \Psi^+ - \bar{\Psi}^+ \sum^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi^+ \right] + e^2 \bar{\Psi}^+ \sum^{\mu\nu} \Psi^+ A_\mu A_\nu \\ &+ \frac{ge}{\sqrt{2}} \bar{\Psi}^+ \sum^{\mu\nu} \Psi^0 A_\mu W_\nu^+ + \frac{ge}{\sqrt{2}} \bar{\Psi}^0 \sum^{\mu\nu} \Psi^+ A_\mu W_\nu^- + \frac{2\beta}{v} e m_z \bar{\Psi}^+ \sum^{\mu\nu} \Psi^+ A_\mu Z_\nu \\ &- \frac{im_z}{v} Z_\mu \left[\partial_\mu \bar{\Psi}^0 \sum^{\mu\nu} \Psi^0 - \bar{\Psi}^0 \sum^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi^0 \right] + \frac{m_z^2}{v^2} \bar{\Psi}^0 \sum^{\mu\nu} \Psi^0 Z_\mu Z_\nu \\ &+ \frac{i\beta m_z}{v} Z_\mu \left[\partial_\mu \bar{\Psi}^+ \sum^{\mu\nu} \Psi^+ - \bar{\Psi}^+ \sum^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi^+ \right] + \frac{\beta^2 m_z^2}{v^2} \bar{\Psi}^+ \sum^{\mu\nu} \Psi^+ Z_\mu Z_\nu \\ &- 4 \sin^2 \theta_w \frac{m_w m_z}{v^2 \sqrt{2}} \bar{\Psi}^+ \sum^{\mu\nu} \Psi^0 Z_\mu W_\nu^+ - 4 \sin^2 \theta_w \frac{m_w m_z}{v^2 \sqrt{2}} \bar{\Psi}^0 \sum^{\mu\nu} \Psi^+ Z_\mu W_\nu^- \\ &+ \frac{2im_w}{v\sqrt{2}} W_\nu^+ \left[\partial_\mu \bar{\Psi}^+ \sum^{\mu\nu} \Psi^0 - \bar{\Psi}^+ \sum^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi^0 \right] + \frac{2im_w}{v\sqrt{2}} W_\nu^- \left[\partial_\mu \bar{\Psi}^0 \sum^{\mu\nu} \Psi^+ - \bar{\Psi}^0 \sum^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi^+ \right] \\ &+ \frac{g^2}{2} \bar{\Psi}^+ \sum^{\mu\nu} \Psi^+ W_\mu^+ W_\nu^- + \frac{g^2}{2} \bar{\Psi}^0 \sum^{\mu\nu} \Psi^0 W_\mu^+ W_\nu^- \quad , \end{aligned} \quad (4.23)$$

de este, se identifican también las corrientes débiles oscuras

$$J_{+0}^\mu = i \left(\partial_\mu \bar{\Psi}^+ \sum^{\mu\nu} \Psi^0 - \bar{\Psi}^+ \sum^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi^0 \right) , \quad (4.24)$$

$$J_{0+}^\mu = i \left(\partial_\mu \bar{\Psi}^0 \sum^{\mu\nu} \Psi^+ - \bar{\Psi}^0 \sum^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi^+ \right) . \quad (4.25)$$

Del Lagrangiano se pueden leer las reglas de Feynman que se enlistan completas en el Apéndice 8, aquí solo mostramos las que resultan de interés para nuestros propósitos. Los diagramas de Feynman correspondientes se muestran en las figuras 14, 15 y 16. Los tres vértices correspondientes a estos diagramas son respectivamente

$$V_1^\nu = -\frac{2im_W}{v\sqrt{2}} \sum^{\mu\nu} (p_\mu - p'_\mu) \quad , \quad V_2 = ivg_0 \quad , \quad V_3^\nu = \frac{im_Z}{v} \sum^{\mu\nu} (p_\mu - p'_\mu) \quad . \quad (4.26)$$

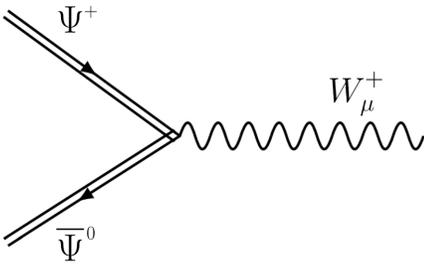


Figura 14: Posible decaimiento de Ψ^+ .

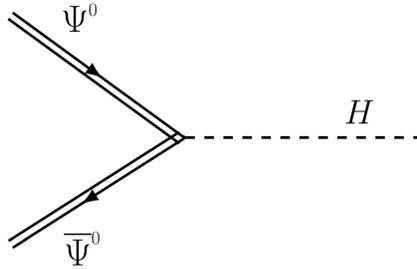


Figura 15: Portal de Higgs.

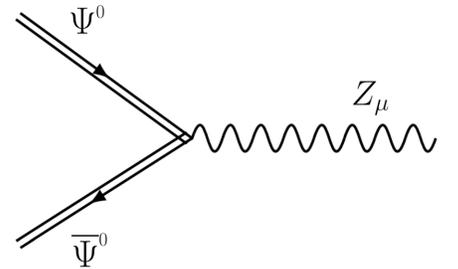


Figura 16: Portal de bosón Z .

El diagrama mostrado en la figura 14 resulta de interés ya que si buscamos que la densidad de Ψ^+ sea prácticamente nula en la actualidad, deberá decaer en W^+ y Ψ^0 , lo que implica que su masa debe ser al menos la suma de las masas de la materia oscura y la del W^\pm . Como se muestra más adelante, los otros dos vértices, portal de Higgs y Z , son los que permiten la interacción materia oscura-nucleón. La interacción de portal con Higgs está contenida en el sector de masas mostrado en la ecuación (4.28).

4.1.2. Sector de masas y de Yukawa

Trabajemos primero el rompimiento de la simetría en el sector de masas en el *gauge* unitario

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ H + v \end{pmatrix} . \quad (4.27)$$

El Lagrangiano toma la forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_m &= g_1 (\bar{\Psi}\phi) (\phi^\dagger\Psi) - g_2 (\bar{\Psi}\Psi) (\phi^\dagger\phi) - \mu^2\bar{\Psi}\Psi \\
&= \frac{1}{2} (g_1 - g_2) (H^2 + 2Hv) \bar{\Psi}^0\Psi^0 - \left[\frac{v^2}{2} (g_2 - g_1) + \mu^2 \right] \bar{\Psi}^0\Psi^0 \\
&\quad - \frac{g_2}{2} (H^2 + 2Hv) \bar{\Psi}^+\Psi^+ - \left[\frac{v^2 g_2}{2} + \mu^2 \right] \bar{\Psi}^+\Psi^+
\end{aligned} \tag{4.28}$$

como se mencionó previamente Ψ^0 y Ψ^+ se comportan como partículas cargadas (con algún tipo de carga), es decir el término de masa va como $-m^2\bar{\psi}\psi$, las masas son entonces

$$m_+^2 = \frac{v^2 g_2}{2} + \mu^2 \quad , \quad m_0^2 = \frac{v^2}{2} (g_2 - g_1) + \mu^2 \quad , \tag{4.29}$$

las masas al cuadrado deben ser positivas, esto impone las siguientes condiciones sobre los acoplamientos

$$g_2 > -\frac{2\mu^2}{v^2} \quad , \tag{4.30}$$

$$g_1 < g_2 + \frac{2\mu^2}{v^2} \quad . \tag{4.31}$$

Si buscamos que el compañero cargado Ψ^0 haya decaído en su totalidad o casi en su totalidad en una etapa temprana del universo, y que la abundancia de la materia oscura se tal que aun sea detectable, debemos imponer por lo menos un ordenamiento de masas como $m_+ > m_0$, esto implica que

$$\frac{m_0^2}{m_+^2} = \frac{v^2 (g_2 - g_1) + 2\mu^2}{v^2 g_2 + 2\mu^2} < 1 \quad . \tag{4.32}$$

De la ecuación anterior se puede verificar que

$$g_1 > 0 \quad , \tag{4.33}$$

utilizando esto y la ecuación (4.31) podemos decir que

$$g_2 + \frac{2\mu^2}{v^2} > g_1 > 0 \quad , \tag{4.34}$$

esto implica lo ya obtenido en (4.30)

$$g_2 > -\frac{2\mu^2}{v^2} . \quad (4.35)$$

La combinación de la condición sobre g_1 mostrada en (4.31) y la condición que se impone sobre el ordenamiento de masas en (4.32) implica que se debe cumplir la condición sobre g_2 mostrada en (4.30), en otras palabras, el ordenamiento de masas impuesto genera naturalmente las restricciones en (4.30) y viceversa. Otra forma equivalente de observar lo anterior es la siguiente. La masa del compañero Ψ^+ es

$$m_+^2 = m_0^2 + \frac{v^2}{2}g_1 \quad , \quad \frac{v^2}{2} > 0 \quad , \quad (4.36)$$

la única forma de conseguir el ordenamiento de masas deseado es con $g_1 > 0$, esto concuerda con (4.33). Para simplificar la notación en los cálculos posteriores se ha definido $g_0 = g_1 - g_2$.

5. Detección directa de materia oscura

Con la estimación de la abundancia de la materia oscura representando alrededor del $\Omega_{DM} \approx 26\%$ de la energía total del universo, se infiere que existe un gran flujo de materia oscura en la Tierra. Con esto, se abre la posibilidad de detectar materia oscura de forma directa mediante dispersión con núcleos atómicos. Como se comentó en la Introducción, han sido ya varios los experimentos que se han enfocado en detectar materia oscura de este modo.

5.1. Interacción independiente de espín

Como ya se comentó, la probabilidad de que ocurra una interacción con una cierta intensidad está dada por la sección transversal. El número de detecciones por día por kilogramo en un rango dT de energía nuclear de retroceso³⁰ T , de una partícula de materia oscura con masa m_0 con un núcleo de masa m está dado por [109, 110]

$$\frac{dR}{dT} = \frac{\rho}{mm_0} \int_{v_{min}}^{v_{esc}} |v| f(v) \frac{d\sigma}{dT}(T, v) d^3v \quad , \quad (5.1)$$

donde

- ρ : Densidad local de materia oscura ,
- $\frac{d\sigma}{dT}(T, v)$: Sección transversal diferencial entre materia oscura con núcleo ,
- $f(v)$: Distribución local de velocidades de la materia oscura en la Tierra ,
- v_{min} : Velocidad mínima de la materia oscura necesaria para transferir al núcleo una energía T ,
- v_{esc} : Velocidad máxima que puede tener una partícula del materia oscura en el Halo galáctico ,

se suele describir el perfil de velocidades de la materia oscura mediante una distribución isotrópica de tipo Maxwell–Boltzmann

$$f(v) \propto e^{-v^2/2\alpha^2} \Theta(v_{esc} - v) \quad , \quad \alpha = 220\sqrt{3/2} \text{ Km/s} \quad . \quad (5.2)$$

La función de Heaviside Θ trunca el perfil de velocidades para velocidades mayores a la velocidad de escape que suele tomarse como $v_{esc} \approx 544 \text{ Km/s}$ [111]. Se han propuesto modelos también que incorporen naturalmente el tamaño finito y continuo del Halo de materia oscura [112, 113].

³⁰Energía que es transferida de la materia oscura al núcleo atómico.

En el marco de referencia de laboratorio, es decir con el núcleo atómico en reposo, la sección transversal diferencial para interacción entre materia oscura y núcleo está dada por

$$\frac{d\sigma}{dT}(T, \mathbf{v}) = \frac{|\overline{\mathcal{M}}(s, t, u)|}{32\pi m m_0^2 v^2} \quad , \quad (5.3)$$

donde $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 F_{SI}(q^2)$. La amplitud de probabilidad \mathcal{M}_0 se construye mediante una teoría nuclear efectiva, es decir, considera a los protones y neutrones como partículas por sí mismas, no como distribuciones de quarks. La cantidad $F_{SI}(q^2)$ es el factor de forma nuclear independiente de espín y nos permite incluir correcciones tomando en cuenta la composición del núcleo de un tamaño finito. Se asume también que los neutrones y protones del núcleo contribuyen del mismo modo al proceso de dispersión (conservación de isospín). Mediante una expansión no relativista y cálculos de cinemática, es sencillo encontrar la energía de retroceso

$$T = \frac{2m m_0^2 v^2 \cos(\theta)}{(m + m_0)^2} + \mathcal{O}(v^4) \quad , \quad (5.4)$$

siendo θ el ángulo de retroceso nuclear respecto a la dirección que lleva la materia oscura. La velocidad mínima para producir transferir una energía de retroceso T ocurre cuando $\theta = 0$ y está dada por

$$v_{min} = \frac{(m + m_0)^2}{2m m_0^2} T = \frac{mT}{2\mu_N^2} \quad , \quad (5.5)$$

con μ_N la masa reducida de la materia oscura con el núcleo.

La función $|\overline{\mathcal{M}}(s, t, u)| = G(T, v)$, es una función regular en T por lo que se puede expandir como

$$G(T, v) = G_0(v^2) + G_1(v^2)T + \dots \approx G_0(0) \quad . \quad (5.6)$$

Se efectúa también la aproximación $G_0(v^2) \approx G_0(0)$ ya que la velocidad con la que la materia oscura se mueve en la región del sistema solar es no relativista y no estamos considerando efectos de espín. Con lo anterior, podemos calcular la sección transversal total dada por

$$\sigma(v) = \frac{G_0(0)\mu_N^2}{16\pi m^2 m_0^2} \equiv \sigma_{SI} \quad , \quad (5.7)$$

donde hemos definido la sección transversal independiente de espín σ_{SI} .

El experimento XENON1T reporta el observable [114] de sección transversal independiente de espín entre materia oscura y nucleón

$$\sigma_p = \frac{\mu_p^2}{A^2 \mu_N^2} \sigma_{SI} = \frac{G_0(0)\mu_p^2}{16A^2 \pi m^2 m_0^2} \quad , \quad (5.8)$$

donde μ_p es la masa reducida entre la materia oscura y protón y A el número atómico.

5.2. El experimento XENON1T

El experimento XENON [66] es un experimento de detección directa de materia oscura. Detecta fotones emitidos secundariamente como consecuencia de la interacción entre partícula de materia oscura y xenón líquido. Este experimento se encuentra bajo tierra en el *Laboratori Nazionali del Gran Sasso*, en Italia. El detector consta de un tanque lleno de 3.3 toneladas de xenón líquido y cuenta con un total de 248 foto-multiplicadores (PMTs) independientes. El margen de diferencia entre la fase de estado líquida y sólida del xenón es de 4°C, por lo que es especialmente importante mantener la temperatura del experimento estable. Durante la operación de XENON1T, la temperatura del xenón líquido contenido en el tanque era de alrededor de -100°C.

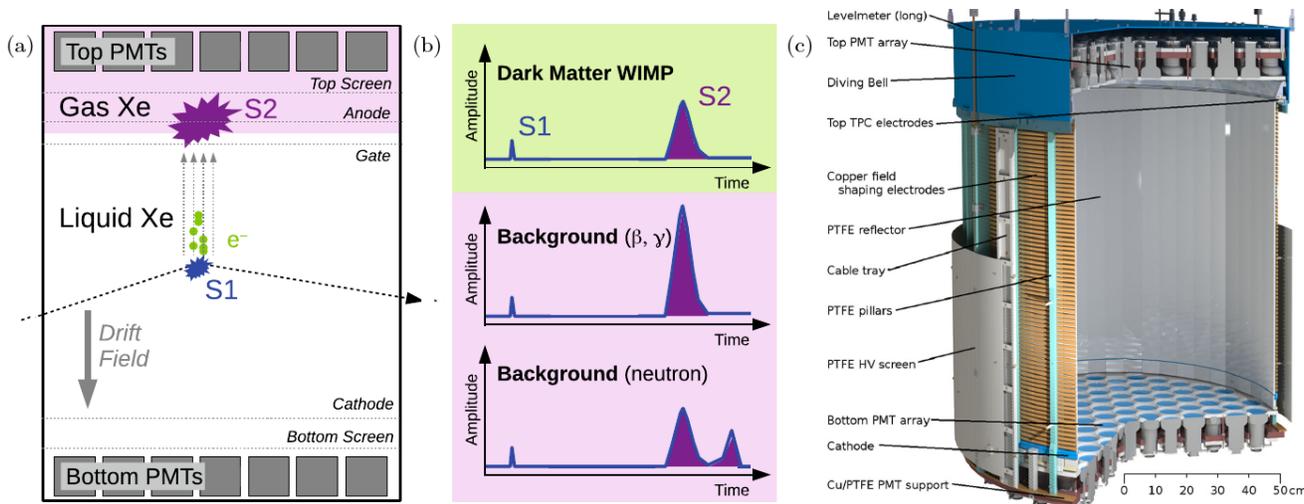


Figura 17: (a) Diagrama que ilustra la operación del detector. (b) Formas de señales para diferentes tipos de ruido. (c) Ilustración del detector, está hecho de materiales de baja radiactividad para evitar ruido en las mediciones. Figuras tomadas de [66].

El proceso de detección consta de dos fases, una líquida y otra gaseosa. Primero, al interactuar una partícula de materia oscura con un núcleo de xenón líquido y transferirle energía, se liberan electrones de ionización y una primera cantidad de fotones de centelleo $S1$. Los electrones de ionización son arrastrados mediante un campo eléctrico $E = 1$ kV/cm hacia la fase gaseosa. Al entrar en esta zona de xenón gaseoso, el campo eléctrico de arrastre aumenta a $E = 10$ kV/cm produciendo una segunda cantidad de fotones de centelleo $S2$. Dos arreglos de foto-multiplicadores detectan los centelleos $S1$ y $S2$, uno en la parte inferior dentro del líquido, y otro en la parte superior en la cavidad gaseosa. La energía de retroceso T depositada en el núcleo, se puede inferir midiendo la energía de los fotones $S1$ y $S2$ detectados.

La principal fuente de ruido³¹ es por decaimiento del isótopo artificial Kr-85. Este isótopo artificial es creado en procesamiento de combustible nuclear y pruebas de bombas atómicas y está presente en el xenón líquido comercial adquirido por la colaboración. Este xenón comercial es purificado mediante un proceso de destilación criogénico [115]. Otra fuente importante de ruido es el de dispersión entre neutrones y xenón. Esta y otras fuentes de ruido son descartadas mediante relaciones bien establecidas entre las señales $S1$ y $S2$ como se muestra en la figura 17.

Las mediciones más recientes [116] reportadas por la colaboración XENON1T, imponen un límite superior sobre la sección transversal independiente de espín entre materia oscura y núcleo de xenón mostrado en la ecuación (5.8). El límite reportado se muestra en la figura 18.

³¹Se entiende por ruido los procesos que generan datos que no se pueden atribuir a la interacción entre materia oscura y xenón.

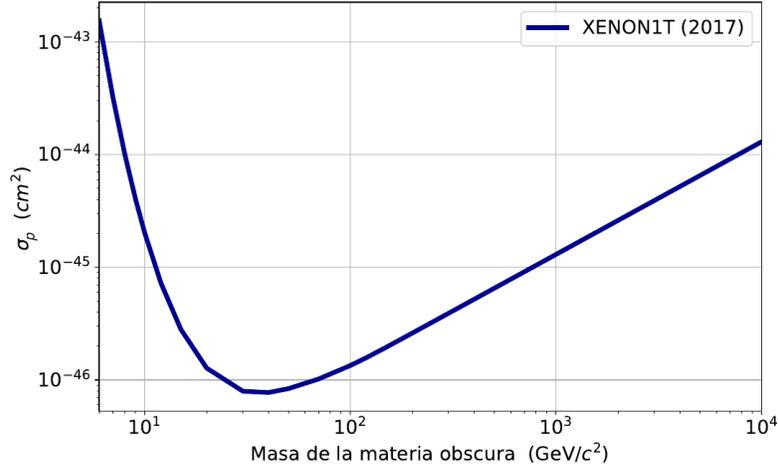


Figura 18: Límite superior sobre la sección transversal independiente de espín reportada en [116].

Se ha reportado también el límite superior sobre la sección transversal de dispersión elástica entre WIMP-protón y WIMP-neutrón dependiente de espín [117] así como el límite superior para la sección transversal de dispersión inelástica WIMP-Xe [118].

5.3. Teoría nuclear - electrodébil efectiva

Para comparar el modelo con los datos se necesita de una teoría efectiva para interacciones electrodébiles con el núcleo atómico. Siguiendo los resultados mostrados en [119] el Lagrangiano es

$$\mathcal{L}_{eff}^N = g_{HN} H \bar{N} N - (Ze) \bar{N} \gamma^\mu N A_\mu - \frac{m_Z}{2v} \bar{N} \gamma^\mu (a + b\gamma^5) N Z_\mu \quad , \quad (5.9)$$

Z es el número atómico, A número de nucleones, N representa el campo del núcleo de Xe y los acoplamientos efectivos están dados por

$$g_{HN} = Zg_{Hpp} + (A - Z)g_{Hnn} \quad , \quad a_p = 1 - 4 \sin^2 \theta_w \quad ,$$

$$a = Za_p + (A - Z)a_n \quad , \quad a_n = -1 \quad ,$$

$$b = Zb_p + (A - Z)b_n \quad , \quad b_p = -\Delta_u^{(p)} + \Delta_d^{(p)} + \Delta_s^{(p)} \quad ,$$

$$g_{HNN} = - \left(7 \sum_{q \in u, d, s} f_q^{(N)} + 2 \right) \frac{m_N}{9v} \quad , \quad (5.10) \quad b_n = -\Delta_d^{(p)} + \Delta_u^{(p)} + \Delta_s^{(p)} \quad , \quad (5.11)$$

	$f_q^{(p)}$	$f_q^{(n)}$	$\Delta_q^{(p)}$
u	0.023	0.019	0.770
d	0.034	0.041	-0.400
s	0.140	0.140	-0.120

Tabla 2: Valores tomados de [120].

Los valores utilizados se muestran en la tabla 2. Las reglas de Feynman que necesitamos se muestran en las figuras 19 y 20.

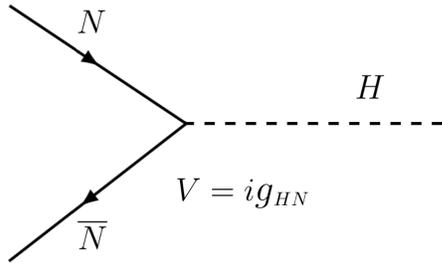


Figura 19: Interacción Higgs - núcleo.

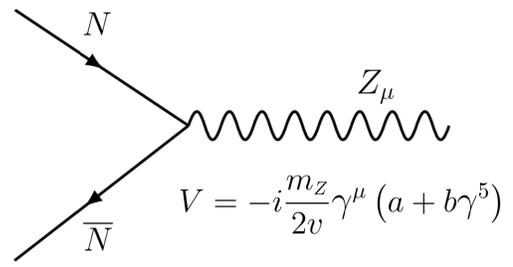


Figura 20: Interacción bosón Z - núcleo.

5.4. Dispersión $\Psi^0 N \rightarrow \Psi^0 N$

En esta sección se calcula la sección transversal σ_{SI} para la dispersión de materia oscura - núcleo atómico. A nivel árbol, este proceso de dispersión está dado por los diagramas mostrados en la figura 21, ambos canales t .

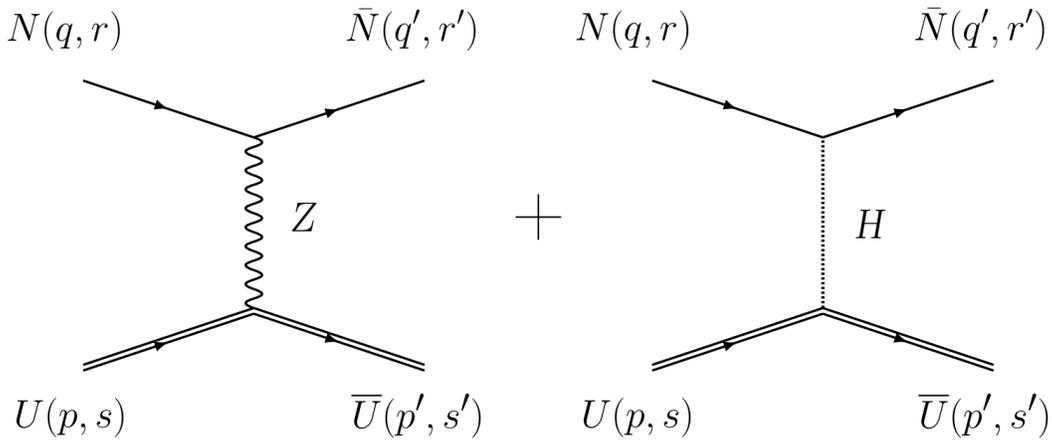


Figura 21: Dispersión de materia oscura con núcleo.

Las reglas de Feynman para interacción de materia oscura mediada por Higgs y bosón Z se muestran en las figuras 22 y 23.

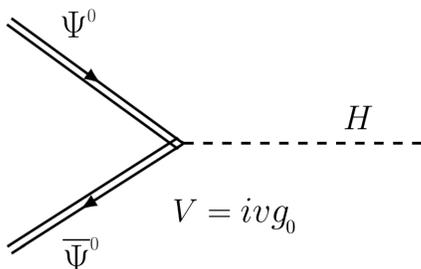


Figura 22: Interacción higgs - materia oscura.

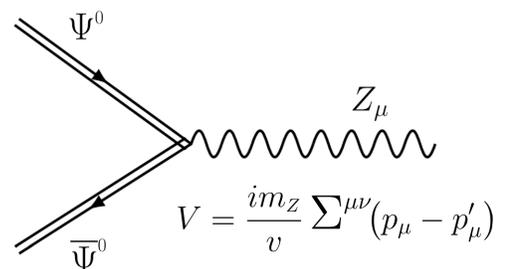


Figura 23: Interacción bosón Z - materia oscura.

Trabajemos en el sistema de referencia de laboratorio, es decir, con el núcleo en reposo. Las variables de Mandelstam son

$$\begin{aligned} s &= (p + q)^2 = m^2 + m_0^2 + 2p \cdot q \quad , \\ t &= (p - p')^2 = 2(m^2 - p \cdot p') \quad , \\ u &= (p - q')^2 = m^2 + m_0^2 - 2p \cdot q' \quad , \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde m es la masa del núcleo atómico y m_0 la masa de la materia oscura.

Utilizando la conservación de momento, los productos escalares toman la forma

$$\begin{aligned} p \cdot q &= p' \cdot q' = \frac{1}{2}(s - m^2 - m_0^2) \quad , & p \cdot q' &= p' \cdot q = \frac{1}{2}(m^2 + m_0^2 - u) \quad , \\ q \cdot q' &= m^2 - \frac{t}{2} \quad , & p \cdot k &= q \cdot k = \frac{t}{2} \quad , \\ p \cdot p' &= m^2 - \frac{t}{2} \quad , & p' \cdot k &= q' \cdot k = -\frac{t}{2} \quad . \end{aligned} \quad (5.13) \quad (5.14)$$

Hagamos una expansión no relativista sobre las variables de Mandelstam. Recordemos que el objetivo es calcular la sección eficaz independiente de espín ya que la materia oscura orbita la galaxia con una velocidad no relativista, por ende, los efectos de espín son pequeños. Los momentos son

$$p^\mu = (E_0, \mathbf{p}) \quad , \quad q^\mu = (m, \mathbf{0}) \quad , \quad q'^\mu = (m + T, \mathbf{q}') \quad , \quad (5.15)$$

efectuando un cálculo sencillo y utilizando la aproximación

$$E_0 = m_0 + \frac{1}{2}m_0v^2 + \mathcal{O}(v^4) \quad ,$$

las variables de Mandelstam toman la forma

$$s \approx (m_0 + m)^2 + m_0mv^2 \quad , \quad t = -2mT \quad , \quad u \approx (m_0 - m)^2 - m_0mv^2 + 2mT \quad . \quad (5.16)$$

La amplitud invariante está dada por

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_Z + \mathcal{M}_H \quad , \quad (5.17)$$

$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_Z|^2 + |\mathcal{M}_H|^2 + 2\text{Re}\{\mathcal{M}_H^\dagger \mathcal{M}_Z\} \quad . \quad (5.18)$$

5.4.1. Canal de Higgs

Para el canal mediado por un bosón de Higgs, de leer el diagrama de Feynman se obtiene la amplitud invariante

$$i\mathcal{M}_H = \bar{U}^{s'}(p') (ivg_0) U^s(p) \frac{i}{t - m_H^2} \bar{N}^{r'}(q') (ig_{HN}) N^r(q) \quad , \quad (5.19)$$

$$\mathcal{M}_H = \frac{-vg_0g_{HN}}{t - m_H^2} \bar{U}^{s'}(p') U^s(p) \bar{N}^{r'}(q') N^r(q) \quad , \quad (5.20)$$

el proceso de detección no distingue entre los posibles valores de espín de la materia oscura, por lo tanto, debemos promediar sobre polarizaciones, utilizando la relación de completéz [75]

$$\sum_s U^s(p) \bar{U}^s(p) = \left(\frac{S(p) + m^2}{2m^2} \right) \quad , \quad (5.21)$$

obtenemos que

$$\frac{1}{6} \sum_{s,s'} \sum_{r,r'} |\mathcal{M}_H|^2 = \frac{v^2 g_0^2 g_{HN}^2}{24m_0^4 (t - m_H^2)^2} \text{Tr} \left[(S^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + m_0^2) (S^{\alpha\beta} p'_\alpha p'_\beta + m_0^2) \right] \text{Tr} \left[(\not{q} + m)(\not{q}' + m) \right] \quad . \quad (5.22)$$

Evaluar estas trazas es sencillo, para la primera solo necesitamos el siguiente par de relaciones [59]

$$\text{Tr} [S^{\mu\nu} S^{\alpha\beta}] = 4g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} + 4g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - 2g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \quad , \quad (5.23)$$

$$\text{Tr} [\# \text{ impar de } S^{\mu\nu}] = 0 \quad . \quad (5.24)$$

La segunda traza involucra únicamente productos de matrices gamma, este cálculo es común en los procesos de dispersión QED. Algunas trazas útiles son (ver [107])

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] &= 4g^{\mu\nu} \quad , \\ \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] &= 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \quad , \\ \text{Tr} [\# \text{ impar de } \gamma^\mu] &= 0 \quad , \\ \text{Tr} [\gamma^5] &= \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = 0 \quad , \\ \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5] &= -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad , \end{aligned} \quad (5.25)$$

las expresiones para estas trazas se calculan utilizando la relación de anticonmutación mostrada en (2.11). La expresión final para este canal toma la forma

$$\frac{1}{6} \sum_{s,s'} \sum_{r,r'} |\mathcal{M}_H|^2 = \frac{2v^2 g_0^2 g_{HN}^2}{3m_0^4 (t - m_H^2)^2} \left(2(m_0^2 - t/2)^2 + m_0^4 \right) \left(2m^2 - t/2 \right) , \quad (5.26)$$

$$\approx \frac{2v^2 g_0^2 g_{HN}^2}{3m_0^4 (2mT + m_H^2)^2} \left(2(m_0^2 + mT)^2 + m_0^4 \right) \left(2m^2 + mT \right) . \quad (5.27)$$

5.4.2. Canal de Z

La amplitud invariante para este canal está dada por

$$i\mathcal{M}_Z = \bar{U}^{s'}(p') i \frac{m_Z}{v} \sum^{\mu\nu} (p_\mu - p'_\mu) U^s(p) \frac{i}{t - m_Z^2} \left(\frac{k_\nu k_\alpha}{m_Z^2} - g_{\nu\alpha} \right) \bar{N}^{r'}(q') \left(-\frac{im_Z}{2v} \right) \gamma^\alpha (a + b\gamma^5) N^r(q) , \quad (5.28)$$

$$\mathcal{M}_Z = \frac{1}{2v^2 (t - m_Z^2)} \bar{U}^{s'}(p') \sum^{\mu\nu} (p_\mu - p'_\mu) U^s(p) (k_\nu k_\alpha - g_{\nu\alpha} m_Z^2) \bar{N}^{r'}(q') \gamma^\alpha (a + b\gamma^5) N^r(q) , \quad (5.29)$$

al promediar sobre polarizaciones se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \sum_{s,s'} \sum_{r,r'} |\mathcal{M}_Z|^2 &= \frac{1}{96v^4 m_0^4 (t - m_Z^2)^2} (p_\mu - p'_\mu) (k_\nu k_\alpha - g_{\nu\alpha} m_Z^2) \text{Tr} \left[(S + m_0^2) \Sigma^{\mu\nu} (S' + m_0^2) \Sigma^{\sigma\rho} \right] \\ &\quad \times (p_\sigma - p'_\sigma) (k_\rho k_\beta - g_{\rho\beta} m_Z^2) \text{Tr} \left[(q + m) \gamma^\alpha (a + b\gamma^5) (q' + m) \gamma^\beta (a + b\gamma^5) \right] . \end{aligned} \quad (5.30)$$

En este caso, el cálculo de la primera traza se vuelve demasiado tedioso y extenso, esto debido al término que contiene productos de cuatro operadores $S^{\mu\nu}$. De nuevo, el cálculo de la traza que proviene de espinores de Dirac es sencillo pero algo tedioso. Una vez evaluadas las trazas, la expresión toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \sum_{s,s'} \sum_{r,r'} |\mathcal{M}_Z|^2 &= -\frac{t}{48m_0^4 v^4 (t - m_Z^2)^2} \left\{ 4m_0^4 \left[m_Z^4 \left(b^2(7m^2 - t - u) - a^2 m^2 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2tm_Z^2 \left(a^2 t + b^2(t - 4m^2) \right) + 4b^2 m^2 t^2 \right] + 2t^2 \left[tm_Z^2 \left(a^2 t + b^2(t - 2m^2) \right) + b^2 m^2 (t^2 + m_Z^4) \right] \right. \\ &\quad \left. + m_0^2 \left[m_Z^4 \left(a^2 \left(6m^4 - 4m^2(s + u) + s^2 + u^2 \right) + b^2 \left(2m^4 - 4m^2(t + u) + t^2 + 2tu + 2u^2 \right) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2t^3 (a^2 + b^2) m_Z^2 \right] + 2m_0^6 (b^2 - a^2) m_Z^4 \right\} , \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} \sum_{s,s'} \sum_{r,r'} |\mathcal{M}_Z|^2 &\approx \frac{m^2 T}{12m_0^4 v^4 (2mT + m_z^2)^2} \left\{ 4m^3 T^2 \left(4m_z^2 T (a^2 T + b^2(m+T)) + b^2(4m^2 T^2 + m_z^4) \right) \right. \\
&\quad \left. + 16mm_z^2 T (a^2 T + b^2(2m+T)) + 32b^2 m^3 T^2 \right] - 2mm_0^3 T (v^2 + 2) (a^2 + b^2) m_z^4 \\
&\quad + m_0^4 \left[m_z^4 (a^2 (m(v^2 + 4)v^2 + 2T)) + b^2 (m(v^4 + 4v^2 + 16) + 2T) \right] \\
&\quad \left. + 2mm_0^2 m_z^2 T \left(m_z^2 (a^2(T-m) + b^2(m+T)) - 4mT^2(a^2 + b^2) \right) \right\} . \quad (5.32)
\end{aligned}$$

5.4.3. Término de interferencia

La interacción de interferencia está descrita por el siguiente término

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_H^\dagger \mathcal{M}_Z &= \frac{-g_0 g_{HN}}{2v(t - m_H^2)(t - m_z^2)} \bar{U}^{s'}(p') U^s(p) \bar{N}^{r'}(q') N^r(q) \\
&\quad \times \bar{U}^{s'}(p') \sum^{\mu\nu} (p_\mu - p'_\mu) U^s(p) (k_\nu k_\alpha - g_{\nu\alpha} m_z^2) \bar{N}^{r'}(q') \gamma^\alpha (a + b\gamma^5) N^r(q) , \quad (5.33)
\end{aligned}$$

al promediar sobre polarizaciones la expresión obtenida es

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} \sum_{s,s'} \sum_{r,r'} \mathcal{M}_H^\dagger \mathcal{M}_Z &= \frac{-g_0 g_{HN}}{48m_0^4 v (t - m_H^2)(t - m_z^2)} (p_\mu - p'_\mu) (k_\nu k_\alpha - g_{\nu\alpha} m_z^2) \\
&\quad \times \text{Tr} \left[(S + m_0^2)(S' + m_0^2) \sum^{\mu\nu} \right] \text{Tr} \left[(\not{q} + m)(\not{q}' + m) \gamma^\alpha (a + b\gamma^5) \right] .
\end{aligned}$$

Sin hacer ninguna aproximación, el término de interferencia se anula. A nivel árbol, las únicas contribuciones al proceso están dadas por los canales “puros” de Higgs y Z. Quizá la contribución de interferencia se hace notoria hasta nivel de *loop*

$$\frac{1}{6} \sum_{s,s'} \sum_{r,r'} \mathcal{M}_H^\dagger \mathcal{M}_Z = 0 . \quad (5.34)$$

5.4.4. Sección transversal

Efectuando el límite no relativista sobre las variables de Mandestalm y las expansiones sobre T y v mencionadas en la sección 5, definiendo $g_{DNH} = -vg_{HN}$, el módulo cuadrado promediado de la amplitud final es

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{M}}|^2 &\approx \frac{4m^2}{m_H^4} g_0^2 g_{DNH}^2 + \frac{2}{3} mT \left(\frac{2b^2 m^2}{v^4} + \frac{g_0^2 g_{DNH}^2}{m_0^2 m_H^6} (3m_0^2 (m_H^2 - 8m^2) + 8m^2 m_H^2) \right) + \frac{m^3 T}{3v^4} (a^2 + b^2) v^2 . \quad (5.35)
\end{aligned}$$

La contribución principal está dada por el primer término que corresponde a la interacción mediada por Higgs, por lo tanto, se ha tomado

$$G_0(0) = \frac{4m^2}{m_H^4} g_0^2 g_{DNH}^2 \quad . \quad (5.36)$$

De este modo, la sección transversal final total es

$$\sigma_p = \frac{m^2 g_0^2 g_{DNH}^2}{4\pi A^4 (m_p + m_0)^2 m_H^4} \quad , \quad (5.37)$$

la expresión anterior tiene unidades inversas de GeV^2 , para obtener las unidades de cm^2 deseadas, debemos agregar los factores de \hbar y c faltantes. El producto de estas dos constantes fundamentales es

$$\hbar c = 197.3268 \times 10^{-9} \text{ m eV} = 197.3268 \times 10^{-16} \text{ cm GeV} \quad , \quad (5.38)$$

agregando los factores de conversión la expresión final es

$$\sigma_p = \frac{(\hbar c m g_0 g_{DNH})^2}{4\pi A^4 (m_p + m_0)^2 m_H^4} \quad . \quad (5.39)$$

5.5. Consistencia del modelo con XENON1T

El resultado principal mostrado en (5.37) fue comparado con los resultados de XENON1T [116] mostrados en la figura 18. Lo anterior para un conjunto de valores del acoplamiento g_0 . Con el fin de encontrar una región válida del espacio de parámetros, es decir, una región en la que el modelo esté en acuerdo con XENON1T, se encontraron las intersecciones de la predicción del modelo con los datos experimentales. Entre cada par de puntos de los datos, se hizo una interpolación lineal para encontrar la intersección con la expresión (5.37) j veces, cada una con un valor particular de g_0 . La parametrización de la recta está dada por

$$y_j(x) = \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{m_j - m_{j-1}} (x - m_{j-1}) + \sigma_{j-1} \quad , \quad (5.40)$$

donde el par ordenado (m_j, σ_j) , representa los datos experimentales de XENON1T. Buscamos que $y_j(x) = \sigma_p$, esto nos conduce a la ecuación de tercer grado

$$ax^3 + (a(2m_p - b) + c)x^2 + m_p(m_p(a - 2b) + 2c)x + d = 0 \quad , \quad (5.41)$$

donde $x = m_0$ y se ha definido

$$a = \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{m_j - m_{j-1}} \quad , \quad b = m_{j-1} \quad , \quad c = \sigma_{j-1} \quad , \quad d = m_p^2(c - ab) - \frac{G_0(0)}{16\pi A^4} \quad . \quad (5.42)$$

La ecuación (5.41) fue resuelta para cada punto de intersección. El espacio de parámetros consistente con XENON1T se muestra en la figura 24.

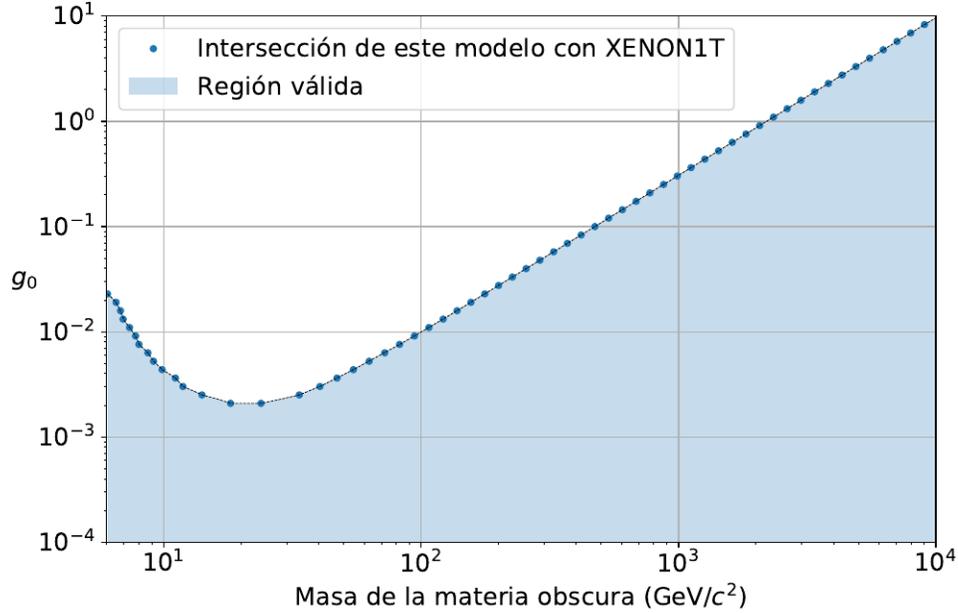


Figura 24: La región sombreada representa el conjunto de valores de g_0 y m_0 consistentes con XENON1T.

La gráfica muestra que para masas grandes, mayores que alrededor de 25 GeV, conforme la masa aumenta el valor máximo del acoplamiento aumenta linealmente en escala logarítmica. Aún cuando se puede pensar en este modelo como un modelo efectivo, se espera que los valores de los acoplamientos sean pequeños, acoplamientos mayores a 1 o incluso de alrededor de 0.5 implicarían que la teoría no es perturbativa, esto excluiría la región de $g_0 \gtrsim 0.5$ y $m_0 \gtrsim 1000$ GeV, restringiendo más el espacio de parámetros.

6. Conclusiones y perspectivas

En este trabajo se ha hecho una revisión del problema de la materia oscura, se propone una posible solución al mismo y se discuten sus implicaciones para el observable de detección directa.

En la Introducción se hace un revisión del origen del problema, propuestas de solución y sus inconvenientes así que como una descripción de algunos observables con los que todas los modelos de materia oscura deben estar de acuerdo.

Se hace un breve estudio de la simetría de Lorentz, sus representaciones irreducibles y sus implicaciones para las ecuaciones de evolución de partículas de espín 0, 1/2 y 1. También se hace la formulación lagrangiana de las teorías de campo correspondientes y se hace un listado de las reglas de Feynman para la electrodinámica.

Se estudia el mecanismo de Higgs en el contexto del mínimo Modelo Estándar, se considera con cierto nivel de detalle como es que se generan las masas de los fermiones y de los bosones de *gauge* a través de los términos de Yukawa.

Se propone un modelo de materia oscura y de interacciones con partículas del Modelo Estándar partiendo del hecho de que recientemente, se ha mostrado que campos de espín 1 que se transforman bajo la representación $(\mathbf{1}, \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ del grupo de Lorentz, pueden explicar varios observables si las masa de materia oscura es del orden de la mitad de la masa del Higgs. Se propone que la materia oscura sea descrita por la parte neutra de un doblete bajo $SU(2)$ acoplado al Higgs mediante términos de Yukawa y a los bosones W^\pm y Z mediante las derivadas covariantes. El rompimiento de la simetría proporciona contribuciones a las masas y también un portal de Higgs. Adicionalmente, hay un portal del bosón Z .

Con el fin de poner a prueba el modelo, se calculó la sección transversal para la interacción entre WIMP y núcleo de xenón mediada por Higgs y bosón Z . Esta cantidad se comparó con la mejor cota experimental impuesta hasta ahora por XENON1T sobre este observable. Con lo anterior, se encontró una región formada por valores de masa de materia oscura y su acoplamiento con el Higgs consistentes con XENON1T.

Aunque inicialmente se esperaba que, dada la naturaleza del modelo, la interacción mediada por bosón Z fuera considerablemente relevante, los cálculos indican que esto no es así, de hecho, el acoplamiento entre la materia oscura y Z no está presente en la aproximación final de σ_{SI} . Ni siquiera está presente en las expansiones a primer y segundo orden sobre T y v respectivamente. La contribución del Z comienza ser relevante en términos de orden alto de energía de retroceso T y velocidad de la materia oscura v . Aunado a lo anterior, sin efectuar aproximaciones, la interacción de interferencia entre Higgs y Z es nula, quizá la interferencia sea notoria a nivel de *loop*.

Como trabajo a futuro se pueden comparar las predicciones del modelo con otros experimentos de detección directa o resultados más recientes.

Aunque el bosón Z no contribuye a este proceso en esta escala de energía podría ser relevante en otros procesos por ejemplo en el estudio de densidad reliquia si se deja la masa como un parámetro libre.

7. Apéndice: Convenciones

En este trabajo se utilizaron las llamadas unidades naturales dadas por

$$\hbar = c = 1 \quad .$$

La métrica, cuadvectores y derivadas son

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad , \quad x^\mu = (x^0, \mathbf{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad , \quad x_\mu = (x_0, -\mathbf{x}) \quad , \quad x_j = -x^j \quad ,$$

$$p^\mu = i\partial^\mu \quad , \quad \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right) \quad .$$

Matrices de Pauli y Dirac

Las matrices sigma estándar de Pauli son

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

En cuanto a las matrices de Dirac, esta se pueden escribir bajo las siguientes “representaciones”

- **Representación quirial**

$$\gamma_0 = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad ,$$

Bajo el grupo de Lorentz, la representación de Dirac es reducible, por lo que cada representación puede ser dividida en dos representaciones más pequeñas. Al tomar la proyección quirial obtenemos la representación quirial para espinores izquierdos y derechos. También es llamada representación de Weyl. Esta representación es de particular utilidad ya que podemos definir

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^\mu = (\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma}) \quad , \quad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\boldsymbol{\sigma}) \quad .$$

• Representación quiral alternativa

Algunos textos como “Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics” de Giunti y Kim, usan esta representación. A simple vista, podría parecer que esta representación está escrita con la métrica elegida en el contexto de la relatividad general $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, sin embargo esto no es así, simplemente es otra representación válida.

$$\gamma_0 = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad ,$$

en esta representación la siguiente convención es utilizada

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ -\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^\mu = (\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma}) \quad , \quad \bar{\sigma}^\mu = (-\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma}) \quad .$$

• Representación de Dirac

Esta representación es la que Dirac originalmente derivó via su acercamiento histórico al derivar su ecuación.

$$\gamma_0 = \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

• Representación de Majorana

Esta es una representación puramente imaginaria

$$\begin{aligned} \gamma_0 = \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^3 &= \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix} \quad . \end{aligned}$$

8. Apéndice: Reglas de Feynman para la materia oscura

Estas reglas de Feynman están contenidas en los términos escalar y de interacción en las ecuaciones (4.23) y (4.28). El factor β presente en algunos vértices es $\beta = 1 - 2 \sin^2 \theta_w$.

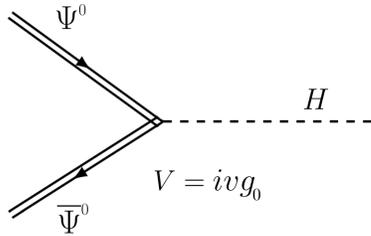


Figura 25

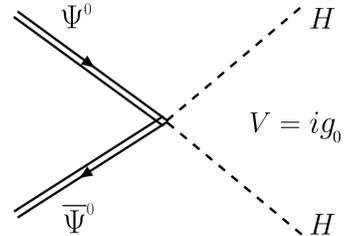


Figura 26

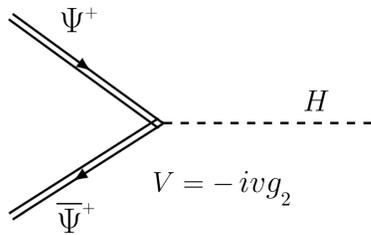


Figura 27

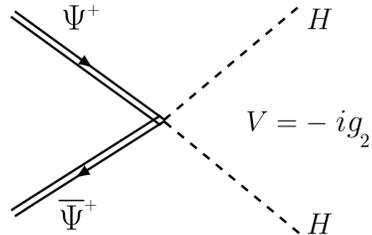


Figura 28

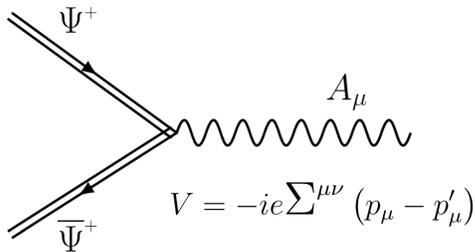


Figura 29

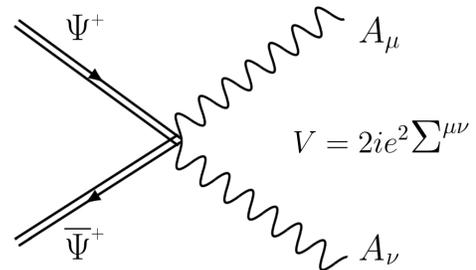


Figura 30

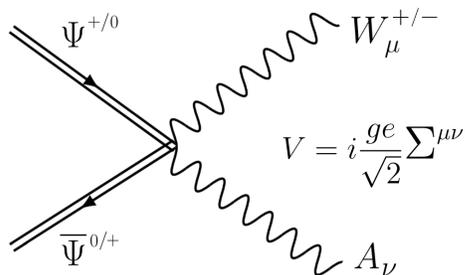


Figura 31

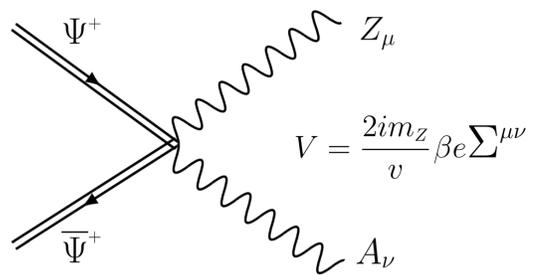


Figura 32

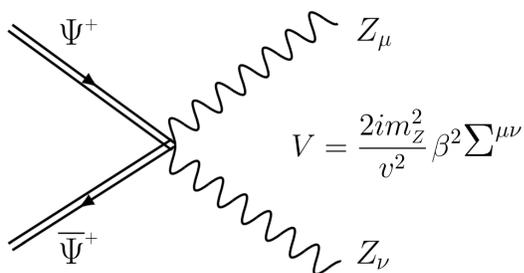


Figura 33

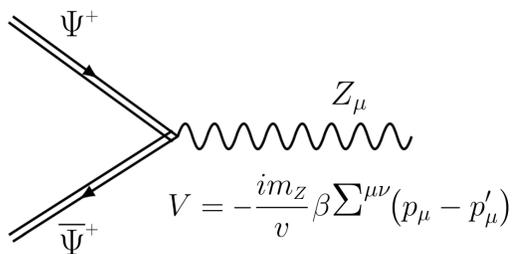


Figura 34

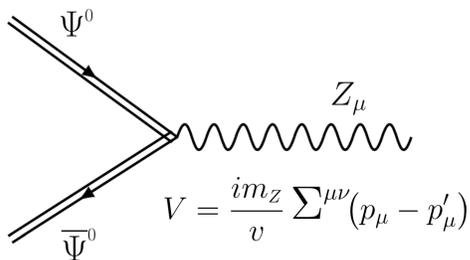


Figura 35

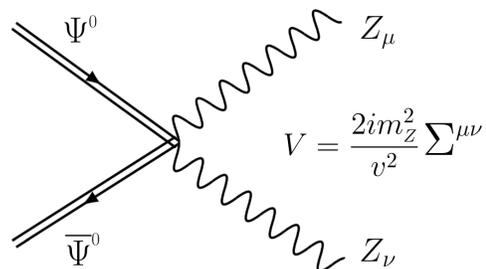


Figura 36

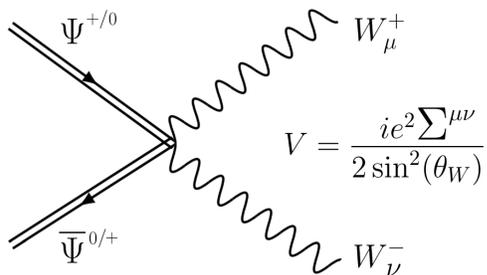


Figura 37

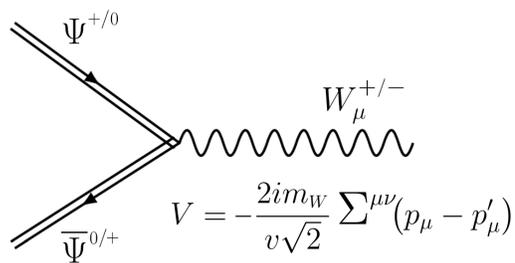


Figura 38

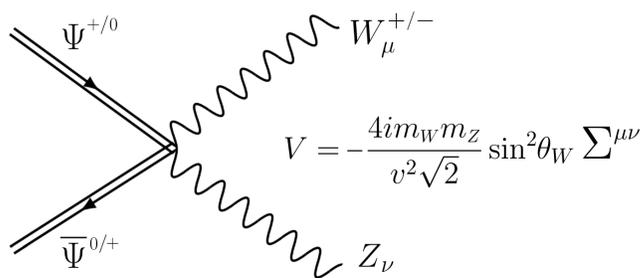


Figura 39

Referencias

- [1] B. Abi et al. (Colaboración Muón $g - 2$). *Phys. Rev. Lett.*, **126**, 141801, (2021). doi: [10.1103/PhysRevLett.126.141801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.126.141801) .
- [2] Y. Fukuda et al. (Colaboración Super-Kamiokande). *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 1562, (1998). doi: [10.1103/PhysRevLett.81.1562](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.1562) .
- [3] Q. R. Ahmad et al. (Colaboración SNO). *Phys. Rev. Lett.* , **87**, 071301, (2001). doi: [10.1103/PhysRevLett.87.071301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.071301) .
- [4] Q. R. Ahmad et al. (Colaboración SNO). *Phys. Rev. Lett.* , **89**, 011301, (2002). doi: [10.1103/PhysRevLett.89.011301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.011301) .
- [5] J.D. Vergados, H. Ejiri, and F. Šimkovic. *Rept. Prog. Phys.*, **75**, 106301, (2012). doi: [10.1088/0034-4885/75/10/106301](https://doi.org/10.1088/0034-4885/75/10/106301) .
- [6] Colaboración CDF. *Science*, **376**, 6589, pp. 170-176, (2022). doi: [10.1126/science.abk1781](https://doi.org/10.1126/science.abk1781) .
- [7] B. Kelvin. *Baltimore lectures on molecular dynamics and the wave theory of light*, (1904).
- [8] H. Poincaré. *L' Astronomie*, 158, (1906).
- [9] H. Poincaré. *POpular Astronomy*, **14**, 475, (1906).
- [10] H. Poincaré and H. Vergene. Paris, A. Hermann et fils, (1911).
- [11] J.C. Kapteyn. *Astrophys. J.*, **55**, p.302, (1992). doi: [10.1086/142670](https://doi.org/10.1086/142670).
- [12] J.H. Jeans. *MNRAS*, **82**, 3, (1922). doi: [10.1093/mnras/82.3.122](https://doi.org/10.1093/mnras/82.3.122).
- [13] Lindblad. *Uppsala Meddelanden*, **11**, 30, (1926).
- [14] E. Opik. *Bull. de la Soc. Astr. de Russie*, **21**, 150, (1915).
- [15] J.H. Oort. *Bull. Astron. Inst. Netherlands*, **6**, 249, (1932).
- [16] F. Zwicky. *Helvetica Physica Acta*, **6**, p. 110-127 , (1933).
- [17] F. Zwicky. *Astrophys. J.*, **86**, p. 217, (1937). doi: [10.1086/143864](https://doi.org/10.1086/143864).
- [18] E. Hubble and M.L. Humason. *Astrophys. J.*, **74**, p. 43, (1931). doi: [10.1086/143323](https://doi.org/10.1086/143323).
- [19] Colaboración Planck. *A&A*, **641**, A6, (2020). doi: [10.1051/0004-6361/201833910](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910).
- [20] A.G. Riess, W. Yuan, L. Macri, D. Scolnic, and D. Brout. arXiv: 2112.04510 (2021).
- [21] van de Hulst H.C., E. Raimond, and H. van Woerden. *Bull. Astron. Inst. Netherlands*, **14**, p. 1, (1957).
- [22] M. Schmidt. *Bull. Astron. Inst. Netherlands*, **14**, p. 17, (1957).
- [23] M. Schwarzschild. *A.J.*, **59**, p. 273, (1954). doi: [10.1086/107013](https://doi.org/10.1086/107013) .

- [24] V.C. Rubin, W.K. Ford, and N. Thonnard. *Astrophys. J.*, **225**, p. L107-L111, (1978). doi: [10.1086/182804](https://doi.org/10.1086/182804).
- [25] A. Bosma. *The distribution and kinematics of neutral hydrogen in spiral galaxies of various morphological types*, Ph.D. Thesis. Groningen Univ., 1978. Bibcode: 1978PhDT.....195B .
- [26] R.R. Shobbrook and B.J. Robinson. *Australian Journal of Physics*, **131**, p. 131 - 146, (1967). doi: [10.1071/PH670131](https://doi.org/10.1071/PH670131).
- [27] D.H. Rogstad and G.S. Shostak. *Astrophys. J.*, **176**, p. 315, (1972). doi: [10.1086/151636](https://doi.org/10.1086/151636).
- [28] R.N. Whitehurst and M.S. Roberts. *Astrophys. J.*, **175**, p. 347, (1972). doi: [10.1086/151562](https://doi.org/10.1086/151562).
- [29] M.S. Roberts and A.H. Rots. *A&A*, **26**, p. 483-485, (1973).
- [30] G. Bertone and D. Hooper. *Rev. Mod. Phys.*, **90**, 045002, (2018). doi: [10.1103/RevModPhys.90.045002](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.90.045002).
- [31] E. Corbelli and P. Salucci. *M.N.R.A.S.*, **331**, 2, p. 441 – 447, (2000). doi: [10.1046/j.1365-8711.2000.03075.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2000.03075.x) .
- [32] T. Lasserre et al. (Colaboración EROS). *A&A*, **355**, L39, (2000). arxiv: astro-ph/0002253.
- [33] Colaboración EROS-2. *A&A*, **469**, 387, (1964). doi: [10.1051/0004-6361:20066017](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20066017).
- [34] M. Davis, J. Huchra, D.W. Latham, and J. Tonry. *Astrophys. J.*, **253**, p. 423 - 445, (1982). doi: [10.1086/159646](https://doi.org/10.1086/159646) .
- [35] S.D.M. White, C.S. Frenk, and M. Davis. *Astrophys. J. - Lett. E.*, **274**, p. L1 - L5, (1983). doi: [10.1086/184139](https://doi.org/10.1086/184139) .
- [36] Colaboración MicroBooNE. arXiv: 2110.14065, (2021).
- [37] Colaboración MicroBooNE. arXiv: 2110.14054, (2021).
- [38] S. Coleman and J. Mandulam. *Phys. Rev.*, **159**, 1251, (1967). doi: [10.1103/PhysRev.159.1251](https://doi.org/10.1103/PhysRev.159.1251).
- [39] R. Peccei and H. Quinn. *Phys. Rev. D*, **16**, 1791, (1977). doi: [10.1103/PhysRevD.16.1791](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.16.1791).
- [40] R. Peccei and H. Quinn. *Phys. Rev. Lett.*, **38**, 1440, (1977). doi: [10.1103/PhysRevLett.38.1440](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.38.1440).
- [41] F. Wilczek. *Phys. Rev. Lett.*, **40**, 279, (1978). doi: [10.1103/PhysRevLett.40.279](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.40.279).
- [42] S. Weinberg. *Phys. Rev. Lett*, **40**, 223, (1978). doi: [10.1103/PhysRevLett.40.223](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.40.223).
- [43] Colaboración CAST. *Nature Phys.*, **13**, p. 584 – 590, (2017). doi: [10.1038/nphys4109](https://doi.org/10.1038/nphys4109).
- [44] M. Milgrom. *Astrophys. J.*, **270**, p. 365 - 370, (1983). doi: [10.1086/161130](https://doi.org/10.1086/161130) .
- [45] M. Milgrom. *Astrophys. J.*, **270**, p. 384 - 389, (1983). doi: [10.1086/161132](https://doi.org/10.1086/161132) .
- [46] J. Bekenstein and M. Milgrom. *Astrophys. J.*, **286**, p. 7 - 14, (1984). doi: [10.1086/162570](https://doi.org/10.1086/162570).
- [47] J. Bekenstein. *Phys. Lett. B*, **202**, 4, p. 497 - 500, (1988). doi: [10.1016/0370-2693\(88\)91851-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(88)91851-5).
- [48] J. Bekenstein. *Phys. Rev. D*, **70**, 083509, (2004). doi: [10.1103/PhysRevD.70.083509](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.70.083509)
Erratum:doi.org/10.1103/PhysRevD.71.069901,.
- [49] C. Skordis and T. Złóśnik. *Phys. Rev. Lett.*, **127**, 161302, (2021). doi: [10.1103/PhysRevLett.127.161302](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.127.161302).
- [50] W. Kolb and S. Turner. *The Early Universe*. Westview Press, 1990, p. 119. ISBN: 0-201-11603-0.

- [51] Colaboración Planck. *A&A*, **641**, A6, (2020). doi: 10.1051/0004-6361/201833910.
- [52] D. Hooper and T. Linden. *Phys. Rev. D*, **84**, 123005, (2011). doi: 10.1103/PhysRevD.84.123005.
- [53] D. Hooper and L. Goodenough. *Phys. Lett. B*, **697**, 5, p. 412 - 428 , (2011).
doi: 10.1016/j.physletb.2011.02.029.
- [54] A. Boyarsky, D. Malyshev, and O. Ruchayskiy. *Phys. Lett. B*, **705**, 3, p. 165 - 169, (2011).
doi: 10.1016/j.physletb.2011.10.014.
- [55] Colaboración Fermi-LAT. *Astrophys. J.*, **819**, 44, (2016). doi: 10.3847/0004-637X/819/1/44.
- [56] Colaboración Fermi-LAT. *Astrophys. J.*, **840**, 43, (2017). doi: 10.3847/1538-4357/aa6cab.
- [57] L. Cholis, D. Hooper, and T. Linden. *JCAP*, **06**, 043, (2015). doi: 10.1088/1475-7516/2015/06/043.
- [58] A. Gautam, R.M. Crocker, and L. Ferrario et al. *Nature Astronomy*, **6**, p. 703–707, (2022).
doi: 10.1038/s41550-022-01658-3.
- [59] H. Hernández Arellano, M. Napsuciale, and S. Rodríguez. *Phys. Rev. D*, **98**, 015001, (2018).
doi: 10.1103/PhysRevD.98.015001.
- [60] H. Hernández Arellano, M. Napsuciale, and S. Rodríguez. *J. High Energ. Phys.*, **2020**, 106, (2020).
doi: 10.1007/JHEP08(2020)106.
- [61] R. Bernabei et al. (Colaboración DAMA). *Eur. Phys. J. C*, **56**, p. 333 – 355 , (2008).
doi: 10.1140/epjc/s10052-008-0662-y.
- [62] R. Bernabei et al. (Colaboración DAMA/LIBRA). *Eur. Phys. J. C*, **67**, p. 39 - 49, (2010).
doi: 10.1140/epjc/s10052-010-1303-9.
- [63] D.S. Akerib et al. (Colaboración LUX) . *Phys. Rev. Lett.*, **118**, 251302, (2017).
doi: 10.1103/PhysRevLett.118.251302.
- [64] D.S. Akerib et al. (Colaboración LUX) . *Phys. Rev. Lett.*, **118**, 021303, (2017).
doi: 10.1103/PhysRevLett.118.021303.
- [65] Yue Meng et al. (Colaboración PandaX-4T). *Phys. Rev. Lett.*, **127**, 261802, (2021).
doi: 10.1103/PhysRevLett.127.261802.
- [66] E. Aprile et al. (Colaboración XENON). *Eur. Phys. J. C*, **77**, 881, (2017).
doi: 10.1140/epjc/s10052-017-5326-3.
- [67] Y. Minami and E. Komatsu. *Phys. Rev. Lett.*, **125**, 221301, (2020).
doi: 10.1103/PhysRevLett.125.221301.
- [68] P.D. Palazuelos, J.R. Eskilt, Y. Minami, M. Tristram, R.M. Sullivan, A.J. Banday, R.B. Barreiro, H.K. Eriksen, K.M. Górski, R. Keskitalo, E. Komatsu, E. Martínez-González, D. Scott, P. Vielva, and I.K. Wehus. arxiv: 2201.07682 , (2022).
- [69] S.M. Carroll, G.B. Field, and R. Jackiw. *Phys. Rev. D*, **41**, 1231, (1990).
doi: 10.1103/PhysRevD.41.1231.
- [70] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*, volume 1. Cambridge University Press, 1995.
doi: 10.1017/CBO9781139644167, ISBN: 9780521670531.
- [71] H. Georgi. *Lie Algebras in Particle Physics*, volume 2. Westview Press, Perseus Books Group, 1999, p. 45. ISBN: 0-7382-0233-9.

- [72] Brian C. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*, volume 2. Springer, Graduate Texts in Mathematics, 2015, p. 135. doi: [10.1007/978-3-319-13467-3](https://doi.org/10.1007/978-3-319-13467-3), ISBN: 978-3-319-13467-3.
- [73] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. *Quantum Mechanics*, volume 1. WILEY, 1977, p. 643. , ISBN: 0-471-16432-1.
- [74] E.U. Condon and G.H. Shortley. *The Theory of Atomic Spectra*. Cambridge University Press, 1953, p. 45. , ISBN: 9780521092098 .
- [75] M. Napsuciale, S. Rodríguez, R. Ferro-Hernández, and S. Gómez-Ávila. *Phys. Rev. D*, **93**, 076003, (2016). doi: [10.1103/PhysRevD.93.076003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.93.076003).
- [76] C.A. Vaquera-Araujo, M. Napsuciale, and R. Ángeles Martínez. *J. High Energ. Phys.*, **2013**, 11, (2013). doi: [doi.org/10.1007/JHEP01\(2013\)011](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2013)011).
- [77] S. Weinberg. *Phys. Rev.*, **133**, B1318, (1964). doi: [10.1103/PhysRev.133.B1318](https://doi.org/10.1103/PhysRev.133.B1318).
- [78] M. Napsuciale and S. Gómez-Ávila. *Phys. Rev. D*, **88**, 096012, (2013). doi: [10.1103/PhysRevD.88.096012](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.096012).
- [79] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2014, p. 34. doi: [10.1017/9781139540940](https://doi.org/10.1017/9781139540940), ISBN: 9781107034730.
- [80] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. WILEY, 1998, p. 582. 3era edición, ISBN: 978-0-471-30932-1.
- [81] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2014, p. 200. doi: [10.1017/9781139540940](https://doi.org/10.1017/9781139540940), ISBN: 9781107034730.
- [82] The standard model of particle physics. symmetry magazine. URL : symmetrymagazine.org/standard-model . Visitado en julio de 2022.
- [83] W. H. Furry. *Phys. Rev.*, **51**, 125, (1937). doi: [10.1103/PhysRev.51.125](https://doi.org/10.1103/PhysRev.51.125) .
- [84] T. D. Lee and C. N. Yang. *Phys. Rev.*, **104**, 254, (1956). doi: [10.1103/PhysRev.104.254](https://doi.org/10.1103/PhysRev.104.254). Errata: *Phys. Rev.*, **106**, 1371, (1957).
- [85] C. S. Wu. *Phys. Rev.*, **105**, 1413, (1957). doi: [10.1103/PhysRev.105.1413](https://doi.org/10.1103/PhysRev.105.1413).
- [86] J.H. Christenson, J.W. Cronin, V.L. Fitch, and R. Turlay. *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 138, (1964). doi: [10.1103/PhysRevLett.13.138](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.13.138) .
- [87] H.A. Kramers. *Proc. Acad. Sci.*, **33**, 959, (1930).
- [88] F.J. Dyson. *J. Math. Phys.*, **3**, 140, (1962). doi: [10.1063/1.1703773](https://doi.org/10.1063/1.1703773) .
- [89] J.P. Lees et al. (Colaboración BABAR). *Phys. Rev. Lett.*, **109**, 211801, (2012). doi: [10.1103/PhysRevLett.109.211801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.211801) .
- [90] G. Lüders and Kong. *Dansk. Vid. Selskab. Mat. Fys. Medd.*, **28**, 5, (1954).
- [91] G. Lüders. *Ann. Phys.*, **2**, 1, (1957). doi: [10.1016/0003-4916\(57\)90032-5](https://doi.org/10.1016/0003-4916(57)90032-5) .
- [92] W. Pauli. *Nuovo Cimento*, **6**, 204, (1957). doi: [10.1007/BF02827771](https://doi.org/10.1007/BF02827771) .
- [93] R.F. Streater and A.S. Wightman. *PCT, Spin And Statistics, And All That*. Princeton University Press, 2000, p. 142. ISBN: 9780691070629.
- [94] Phd comics. URL <https://phdcomics.com/> . Visitado en enero de 2022.

- [95] E. Aprile et al. (Colaboración XENON). arxiv: 2205.04158 , (2022).
- [96] T. Kajita. *Rev. Mod. Phys.*, **88**, 030501, (2016). doi: 10.1103/RevModPhys.88.030501.
- [97] A.B. McDonald. *Rev. Mod. Phys.*, **88**, 030502, (2016). doi: 10.1103/RevModPhys.88.030502.
- [98] Experimento KATRIN. *Nature Phys.*, **18**, p. 160–166, (2022). doi: 10.1038/s41567-021-01463-1.
- [99] P.W. Higgs. *Phys. Lett.*, **12**, 132, (1964). doi: 10.1016/0031-9163(64)91136-9 .
- [100] P.W. Higgs. *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 508, (1964). doi: 10.1103/PhysRevLett.13.508 .
- [101] P.W. Higgs. *Phys. Rev.*, **145**, 1156, (1966). doi: 10.1103/PhysRev.145.1156.
- [102] F. Englert and R. Brout. *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 321, (1964). doi: 10.1103/PhysRevLett.13.321.
- [103] S. Weinberg. *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 1264, (1967). doi: 10.1103/PhysRevLett.19.1264 .
- [104] S.L. Glashow. *Nucl. Phys.*, **22**, 579, (1961). doi: 10.1016/0029-5582(61)90469-2 .
- [105] J. Goldstone. *Nuovo Cimento*, **19**, 154, (1961). doi: 10.1007/BF02812722.
- [106] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg. *Phys. Rev.*, **127**, 965, (1962). doi: 10.1103/PhysRev.127.965.
- [107] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley, 1995. ISBN: 0-201-50397-2.
- [108] H. Hernández Arellano, M. Napsuciale, and S. Rodríguez. arxiv: 2108.10778, (2021).
- [109] T.M. Undagoitia and L. Rauch. *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, **43**, 013001, (2015). doi: 10.1088/0954-3899/43/1/013001.
- [110] J.D. Lweinstein and F. Smith. *Astropart. Phys*, **6**, 87, (1996). doi: 10.1016/S0927-6505(96)00047-3.
- [111] Colaboración RAVE. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **379**, 2, p. 755 – 772, (2007). doi: 10.1111/j.1365-2966.2007.11964.x.
- [112] I.R. King. *Astron. J.*, **71**, p. 64, (1966). doi: 10.1086/109857.
- [113] S. Chaudhury et al. *JCAP*, **2010**, 09, (2010). doi: 10.1088/1475-7516/2010/09/020.
- [114] E. Aprile et al. (Colaboración XENON). *Phys. Rev. D*, **94**, 122001, (2016). doi: 10.1103/PhysRevD.94.122001.
- [115] E. Aprile et al. (Colaboración XENON). *Eur. Phys. J. C*, **77**, 275, (2017). doi: 10.1140/epjc/s10052-017-4757-1.
- [116] E. Aprile et al. (Colaboración XENON). *Phys. Rev. Lett.*, **119**, 181301, (2017). doi: 10.1103/PhysRevLett.119.181301. arxiv: 1705.06655.
- [117] E. Aprile et al. (Colaboración XENON). *Phys. Rev. Lett.*, **122**, 141301, (2019). doi: 10.1103/PhysRevLett.122.14130. arxiv: 2011.10431.
- [118] E. Aprile et al. (Colaboración XENON). *Phys. Rev. D.*, **103**, 063028, (2021). doi: 10.1103/PhysRevD.103.063028. arxiv: 2011.10431.
- [119] M. Cirelli, E. Del Nobile, and P. Panci. *JCAP*, **10**, (2013). doi: 10.1088/1475-7516/2013/10/019.
- [120] P. Gondolo, J. Edsjö, P. Ullio, L. Bergström, M. Schelke, and E. A. Baltz. *JCAP*, **07**, (2004). doi: 10.1088/1475-7516/2004/07/008.

